53/1310

LINEÆ TERTII ORDINIS *NEUTONIANÆ*,

SIVE

Illustratio Tractatus D. *Neutoni* De Enumeratione *Linearum Tertii Ordinis*.

Cui Subjungitur,

Solutio Trium Problematum.

Authore JACOBO STIRLING, è Coll. Ball. *Oxon.*

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, Impensis *Edvardi Whistler* Bibliopolæ *Oxoniensis*, MDCCXVII.

Imprimatur,

JO. BARON,

Vice-Can. Oxon.

Apr. 11. 1717.

HONORATISSIMO Dno.

Dno. *NICOLAO TRON*

E Q U I T I;

LEGATO Sereniſſimæ Reipublicæ *Venetorum* apud REGEM *Magnæ Britanniæ*.

NON eam præ me fero Inſolentiam, qui primam hanc ſtudiorum meorum ſobolem veſtrum (Vir Illuſtriſſime) patrocinium mereri exiſtimem. Cæterùm hæc mihi prima in manus tradita eſt occaſio agnoſcendi ea Beneficia, quibus immerentem Me accumulare es dignatus. Nihil fortaſsè gratius à Tenuitate noſtrâ Tibi rependi potuit; tum quoniam celeberrimi *Neutoni* Opera maximis Tu, ſi quis alius, in Deliciis ſemper habuiſti, tum quòd Veſtra Excellentia non minus amet,

quam foveat Philosophiam, quæ nisi *Mathematicis* Principiis suffulta, corruet. Hic sese mihi aperit Laudum Tuarum Campus, quas aggredi esset supervacaneum, siquidem dulcis Patriæ amor, & insignis Tua in rebus gerendis Peritia satis superque innotescunt ex sublimi Dignitatis gradu ad quem Serenissima Respublica Te promovit. *Cùm* igitur *tot & tanta negotia sustineas*, nihil addam ulteriùs, *ne longo sermone morer Tua tempora*, & nè contra ipsas *Matheseos* (quam colo) Regulas, brevitatis semper amantes, peccare videar.

Excellentiæ Vestræ

Omni cultu & obsequio

Devinctissimus

JA. STIRLING.

LINEÆ TERTII ORDINIS NEUTONIANÆ, &c.

DEFINITIONES.

1. LINEA *Geometrica* eſt cujus Abſciſſæ & Ordinatæ correſpondentes eandem inter ſe ubique obtinent relationem.

2. *Linea Rationalis* eſt cujus Abſciſſæ & Ordinatæ relationem obtinent æquatione vulgari Algebraicâ deſignabilem.

3. *Linea Irrationalis* eſt quando relatio illa æquatione iſtiuſmodi exprimi nequit.

4. *Aſymptotos* curvæ eſt Linea ſimpliciſſima, ſive curva ſive recta ſit, quæ ad curvæ crus tanto magis continue accedit quanto magis producitur, tandem cum eo coincidens.

5. *Crura ejuſdem generis* ſunt quæ pro Aſymptotis ſuis ſortiuntur Lineas ejuſdem ſpeciei.

6. *Hyperbola Inſcripta* eſt quæ tota jacet in Aſymptoton angulo: adinſtar Hyperbolæ Conicæ.

7 *Circumſcripta* eſt quæ Aſymptotos ſecat & partes abſciſſas in ſinu ſuo complectitur.

8. *Ambigena* est quæ uno crure *Inſcribitur* & altero *Circumſcribitur*.

9. *Conchois* est figura habens duo crura ad eaſdem ejuſdem Aſymptoti partes jacentia, & in plagas oppoſitas protenſa, cum vertice verſus Aſymptoton concavo.

10 *Anguinea* vero est figura, quando crura jacent ad diverſas Aſymptoti partes.

11. Figura *Cruciformis* est, quando quatuor ejus crura in uno puncto conveniunt.

12 *Nodata* est, quando duo crura ſe invicem decuſſant: *Nodum* quaſi efficientia.

13. *Cuſpidata* est, quando crura in eorum conjunctione *Cuſpidem* efficiunt.

14. *Punctata* est quæ *Ovalem* habet conjugatam infinite parvam, id est, punctum.

15. *Pura* est quæ *Ovali*, *Nodo*, *Cuſpide* & *Puncto conjugato* privatur.

Linearum Rationalium Ordines.

Linearum Rationalium obvia estdiviſio, ab ipſarum naturis deſumpta, in ſimpliciores ſcilicet & magis compoſitas pro ratione dimenſionum æquationis, quâ relatio inter Abſciſſas & Ordinatas definitur; quando quidem æquatio illa ſimpliciſſima est in qua quantitates indeterminatæ ſunt pauciorum dimenſionum. Qua ratione generaliſſima æquatio alicujus ordinis comprehendit omnes lineas ejuſdem. Ergo Linea primi ordinis erit recta ſola æquatione

$y + ax$

$y+ax+b=0$ designata, Eas secundi ordinis designat $y^2+\overline{ax+b}\times y+cx^2+dx+e=0$, Eas tertii $y^3+\overline{ax+b}\times y^2+\overline{cx^2+dx+e}\times y+fx^3+gx^2hx+k=0$, Eas quarti $y^4+\overline{ax+b}\times y^3+\overline{cx^2+dx+e}\times y^2$ $+\overline{fx^3+gx^2+hx+k}\times y+lx^4+mx^3+nx^2+px+q=0$, Eas quinti $y^5+\overline{ax+b}\times y^4+\overline{cx^2+dx+e}\times y^3$ $+\overline{fx^3+gx^2+hx+k}\times y^2+\overline{lx^4+mx^3+nx^2+px+q}\times y$ $+rx^5+sx^4+tx^3+ux^2+vx+w=0$, Et sic proceditur in infinitum.

In hisce æquationibus x est Abscissa, y Ordinata in quovis angulo ad se invicem inclinatæ; a, b, c, d, &c. quantitates datæ signis suis $+$ & $-$ affectæ, quarum una vel plures deesse potest, modo ex tali defectu, Linea non migret in aliam ordinis inferioris.

Hæ æquationes sunt sui ordinis generalissimæ; continet quippe omnes Abscissæ & Ordinatæ combinationes, ubi earum dimensiones in uno æquationis termino simul sumptæ non superant dimensionem maximam ordinatæ. Etenim dimensio Curvæ pendet ex maxima dimensione Abscissæ & Ordinatæ in eodem æquationis termino.

Numerus Coefficientium in illis æquationibus.

Per Coefficientes hic intellige quantitates datas, a, b, c, d, &c. Harum numerus in prima æquatione est 2, in secunda 5, in tertia 9, in quarta 14, in quinta 20, & sic porro. Atque

hi numeri ſic generantur, eſt $5=2+3$, $9=2+3+4$, $14=2+3+4+5$, $20=2+3+4+5+6$, &c. Adeoque ex Arithmetica ſummatoria univerſaliter facile colligitur, quod ſi ſit n numerus dimenſionum curvæ, erit $\frac{n^2+3n}{2}$ numerus Coefficientium in æquatione generaliſſima Lineas omnes illius ordinis definiente. Hujus uſus in ſequentibus patebit.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Omnis Linea Geometrica curvaturâ continuâ vel in ſe redit, vel pergit in infinitum.

Lineam Geometricam motu puncti continuo deſcriptam hic conſidero; omnis enim Linea Geometrica motu puncti certâ quadam conditione conſtanti moventis deſcribi poteſt: quum igitur motus puncti lege immutabili attemperatur, neceſſario durabit ejus motus in infinitum. Unde via percurſa, id eſt, Linea Geometrica, vel in ſe redit, vel pergit in infinitum, idque curvaturâ continuâ ob regularem puncti motum. Q. E. D.

Coroll. 1. Superficies ſolidorum omnium Geometricorum, curvaturâ continuâ, vel in ſe redeunt, vel pergunt in infinitum. Nam ſuperficies Geometricæ, eodem plane modo Linearum motu genitæ concipiendæ ſunt, quo Lineæ punctorum motu: adeoque hoc Corollarium & hæc Propoſitio ſimili prorſus argumentandi genere demonſtrantur.

Coroll.

Coroll. 2. Crura infinita alicujus Lineæ ductu continuo ſemper conjunguntur. Nam punctum deſcribens neceſſario tranſit ab uno crure ad aliud.

Coroll. 3. Et inde neceſſario ſequitur, quod crurum infinitorum numerus ſemper eſt par: alias enim ſervari nequit motus puncti continuus in infinitum.

Coroll. 4. Omnes rectæ parallelæ ſecant curvam aliquam in iiſdem numero punctis realibus & imaginariis. Hoc Corollarium facillime patet ex Propoſitione & Corollariis ejus ſecundo & tertio.

Coroll. 5. Unde ſi æquatio quælibet involvat duas indeterminatas, Abſciſſam x & Ordinatam y; numerus valorum poſſibilium & impoſſibilium Ordinatæ y, in omni Abſciſſæ magnitudine idem ſemper eſt. Hujus Corollarii beneficio invenire licet numerum radicum æquationis Fluxiones involventis, ut & æquationis in quâ quantitates indeterminatæ indeterminatas habent etiam Exponentes; ut poſtea patebit.

Coroll. 6. Ex Lineæ Geometricæ curvaturâ continuâ, ſequitur nota illa æquationum proprietas; ſcilicet quod radicum impoſſibilium numerus ſemper eſt par.

Serierum infinitarum frequens in ſequentibus erit uſus: viſum eſt igitur aliquid de iiſdem præfari, quum nec earum natura, nec methodus eas inveſtigandi ab aliquo, quod ſciam, huc uſque ſatis explicata fuerit.

De

De Serierum infinitarum Ortu.

D. *Wallisius*, in *Arithmeticâ Infinitorum* Anno 1655. publicatâ, multis exemplis particularibus generaliter tandem invenit, quod si Ordinata curvæ sit $x^{\frac{m}{n}}$ erit ejus area $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ Ope hujus regulæ quadravit omnes curvas quarum Ordinatas habere potuit in terminis rationalibus expressas. D. *Neutonus* per Interpolationem arearum ab Ordinatis (per *Wallisii* regulam) deductarum quadravit Circulum. Et ex datâ ejus areâ in serie infinitâ, per reversum regulæ *Wallisii* invenit ejus ordinatam in serie etiam infinita expressam. Et methodum Interpolandi prosecutus, Theorema suum invenit pro elevando Binomio ad dignitatem quamvis indeterminatam: ut constat ex Epistolâ ejus ad D. *Oldenburgium* 13 Junii Anno 1676. missa. Sed Interpolationum methodum missam tandem faciens, operationes speciosas perinde ut Arithmeticas instituere cœpit, atque docuit reducere radices æquationum omnium, primo simplicium deinde affectarum, in series convergentes. Hoc patet ex ejus *Analysi* à *Barrovio* ad *Collinium* mense Julio, Anno 1669. missa. In eâdem *Analysi*, Serierum ope, quadravit curvas tum *Geometricas* tum *Mechanicas* ut appellari solent. Et docuit quâ ratione, ex datâ areâ vel longitudine curvæ inveniri possit Ba-

Basis vel Ordinata. Sub finem ejusdem *Analyseos*, ope serierum universaliter demonstravit regulam *Wallisii*, methodo nova quæ alia non erat, quam *Fluxionum* methodus.

Cartesius, *Barrovius*, aliique in *Tangentium* methodis, docuerunt invenire rationes primas & ultimas quantitatum *Nascentium* & *Evanescentium*, at non generaliter; Et *Wallisius*, uti mox dictum est, ostendit quomodo inveniri possit area ex data Ordinata terminis rationalibus expressa: Hæc erant dubia & obscura vestigia *Fluxionum* methodi directæ & inversæ. Et impossibile fere erat, absque serierum doctrina, hanc methodum ulterius promovere, quam promoverunt præfati docti Viri. Unde sane non video quâ ratione quis possit *Fluxionum* methodi inventionem sibi arrogare, & non etiam serierum inventionem.

De Natura Serierum.

SErierum methodus in eo fundatur, ut primo assumatur quantitas radici quæsitæ æqualis quam proxime, & corrigatur valor assumptus continue: quo pacto habebitur tandem quantitas, quæ à radicis vero valore minus distabit quavis quantitate data. Hoc vero multifariam præstari potest.

Sit Series eo citius convergens quo minor est x, scilicet $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$ &c. Ponamus esse x admodum parvam, & terminus quilibet posterior erit priore multo minor, atque

que termini pauci initiales ad verum ipsius y valorem quam proxime accedent. Quod si sit x infinite parva, erit accurate $y = Ax^n$, terminis reliquis hujus termini respectu evanescentibus. In æquatione relationem inter x & y definiente, suppone x etiam infinite parvam, & termini quidam æquationis evadent reliquis infinite minores, qui proinde reliquorum maximorum respectu evanescent; è terminis igitur maximis ejusdem ordinis tanquam nihilo æqualibus (eodem plane modo quo ex æquatione numerali) extrahe radicem, nam erit illa Ax^n: qui terminus primus propterea dabitur. Per terminos maximos *ejusdem ordinis* intellige eos qui ad se invicem datam habent rationem, & sunt reliquis omnibus infinite majores. Pone $p = Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r}$ + &c. terminis nondum inventis, & erit $y = p + Ax^n$, quem ipsius y valorem in æquatione substituendo, obtinebis æquationem novam indeterminatas duas x, p involventem. In illa æquatione nova suppone etiam x infinite parvam, ut sit $p = Bx^{n+r}$ accurate, atque ex terminis maximis ejusdem ordinis tanquam nihilo æqualibus radix extracta erit Bx^{n+r}, qui terminus secundus proinde datur. Sit $q = Cx^{n+2r}$ $+ Dx^{n+3r} +$, &c. Unde erit $p = Bx^{n+r} + q$: hunc valorem ipsius p substitute in æquatione relationem inter x, p exprimente; & habebis æquationem tertiam quæ ostendit quam inter se x, q obtinent relationem. Ex hac æquatione invenies tertium terminum Cx^{n+2r} eodem plane modo quo terminos duos primos ex æquationi-

bus

duabus prioribus obtinuisti. Et opus continuando invenire licet terminos seriei sequentes tot quot volueris.

Et si esset series hujusmodi $y = Ax^{n} + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r} +$ &c. eo citius convergens quo major est x; inter operandum supponenda est x infinite magna: atque terminis ordinum inferiorum rejectis è maximis ejusdem ordinis educenda est radix; nam illa est Ax^{n}. Ponendo $p = Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r} +$ &c. adeoque $y = p + Ax^{n}$, habebitur æquatio nova, ex qua invenire licet terminum seriei secundum, & opus continuando reliquos tot quot est animus.

Et eadem ratione qua inveniuntur series eo citius convergentes quo major, vel quo minor est x, invenire licet series eo citius convergentes quo propius accedit x ad datam quamvis quantitatem. v. g. Si quæratur series eo citius convergens quo propius accedit x ad quantitatem a; nec suppono x infinite magnam nec infinite parvam, sed æqualem ipsi a, & tum quæro valorem ipsius y, nam ille valor est primus terminus seriei. Et quomodo ad libitum procedendum est, ex hactenus traditis satis patet.

Hæc de natura serierum & fundamento methodi ad eas perveniendi dicta sufficiant. Processus certe legitimus cuivis in diversis infinitorum ordinibus quam minime etiam versato necessario patet. Ex ipsa operatione facile videre est, has series non dare radices æquationum quæsitas, ni sat celeriter convergant; etenim

nim totus operandi processus in eo fundatur, ut sit x satis parva vel satis magna, hoc est, ut termini seriei subsequentes sint antecedentibus perpetuo minores. Hinc hallucinantur ii qui se aliquid Geometrice etiam accuratum ex seriebus parum convergentibus vel aliquando quidem divergentibus collegisse somniant. Eodemque modo demonstratur Divisio & Radicum Extractio Arithmetica. Omnes enim hujusmodi operationes tam Arithmeticæ quam Speciosæ eodem innituntur fundamento; scilicet ut seriei termini initiales ad quæsitum quam proxime accedant, reliqui vero ut eo magis continue sint minores quo magis à primo distant. Qui series divergentes adhibent in Problematum solutione; idem faciunt, ac si Divisionem Arithmeticam versus dextram, non versus sinistram inchoarent. Istiusmodi enim series quæsitum nunquam dant, sed mere sunt imaginariæ.

Hisce jam expositis, serierum inventio eousque reducitur, ut inveniantur termini maximi alicujus æquationis ejusdem ordinis; posito quod una indeterminatarum quas involvit æquatio, evadit infinite magna vel infinite parva. Quod tamen perficere nemo unquam valuit præter D. *Neutonum* serierum Inventorem. Duplici utitur ille methodo, una, Parallelogrammi scilicet, quam descripsit in Epistola ad D. *Oldenburgium* 24 Octob. Anno 1676, missa; quæ, quamvis à plurimis qui eam haud intellexerunt, ut methodus Mechanica diu neglecta jacuit, est

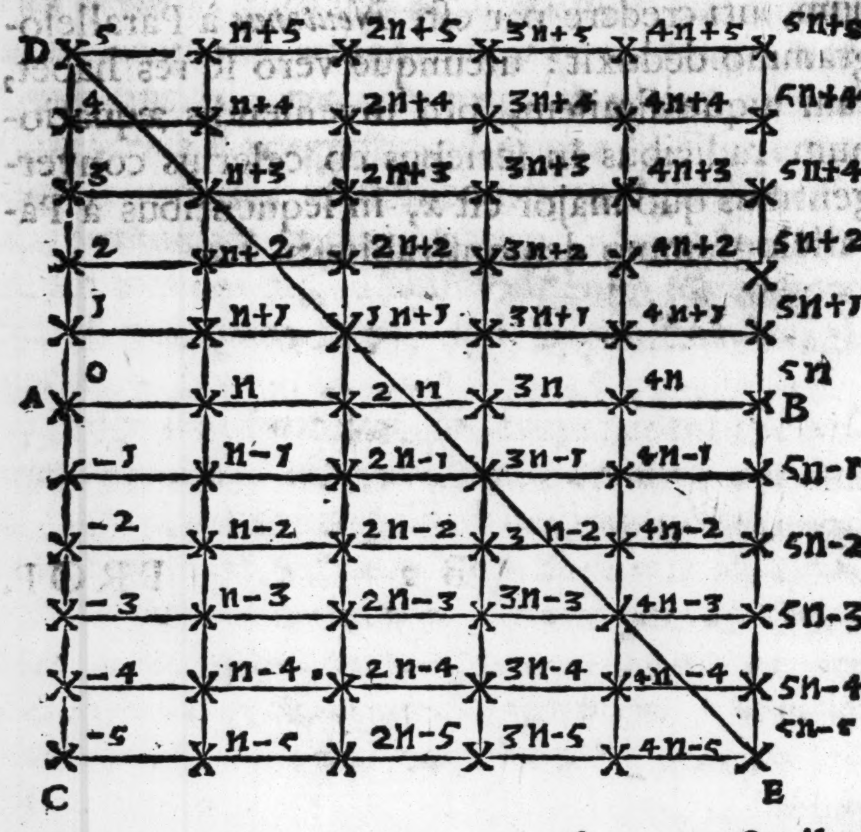
om-

omnium quam quis excogitare potest generalissima & elegantissima. Alteram methodum descripsit D. *Neutonus* in Epistola ad D. *Wallisium* Anno 1692 missa: quæ, quamvis Geometræ præ priore hucusque amplexi sunt, est particularis solummodo; utpote cujus ope tantum invenire licet series eo citius convergentes quo minor est x; & hoc non adeo generaliter. Hæc methodus ait *Neutonus*, *ejusdem est generis cum ea pro extrahendo radices ex æquationibus affectis superius descripta*. Hanc igitur methodum, uti credere par est, *Neutonus* à Parallelogrammo deduxit: utcunque vero se res habet, eam eique similem, pro inveniendis æquationum radicibus in seriebus eo celerius convergentibus quo major est x, in sequentibus à Parallelogrammo demonstrabimus.

PROP. II. PROBL.

Si una variabilium quas involvit æquatio evadat infinite magna vel parva, opporteat invenire terminos illius æquationis maximos ejusdem Ordinis.

DUC rectam DAC eique ad rectos angulos AB: hasce rectas divide in lineolas innumeras æquales, à quarum rectularum extremitatibus erige normales distribuentes spatia angularia DAB, CAB in rectangula innumera æqualia.



Sit *x* indeterminata ex cujus potestatibus conficienda est series, *n* index ipsius *x* in primo termino seriei, adeo ut sit radix quæsita *y* æqualis

lis Ax^n accurate, cum x est infinite magna vel infinite parva; prout seriei quæsitæ natura requirit.

Concipe rectæ CD partes singulas datas esse & unitati æquales; rectæ vero AB partes singulas variabiles & quantitati n semper æquales. In punctis angularibus æqualium rectangulorum substitue dignitates quantitatum x, x^n regulariter ascendentium & descendentium à puncto A, uti in Schemate videre est.

Index cujusvis potestatis ipsius x in recta CD positæ æqualis est ejus distantiæ à puncto A; affirmativi sunt indices supra punctum A, negativi vero qui infra locantur. Eodemque modo, quum pars quælibet rectæ AB æqualis sit n, index dignitatis cujusvis ipsius x in recta AB positæ dat ejus distantiam à puncto A. Adeoque in punctis angularibus extra rectas AB & CD positis, una pars indicis dat distantiam à recta AB, altera pars distantiam à recta CD. Et inde index totus simul sumptus æqualis est summæ aut differentiæ talium distatiarum, prout jacet supra vel infra rectam AB.

Duc jam rectam quamvis DE transeuntem per puncta duo quævis angularia x^5, x^{4n-3}. Et indices terminorum omnium quos attingit recta illa DE erunt æquidistantes in progressione Arithmetica: Supponamus hosce indices sibi invicem æquari, hoc est, eorum differentiam esse nihil, & indices omnes alii majores, minores vel æquales erunt horum indicum alterutri, prout jacent supra, infra vel in ipsa recta DE.

DE. Hæc patent ex ſummis vel differentiis rectarum quibus diximus omnes indices æquari reſpective. Igitur ſi x ſit quantitas infinite magna, termini quos attingit recta DE, erunt ejuſdem ordinis, reliqui vero infinite majores vel minores terminis attactis prout jacent ſupra vel infra rectam DE. Et ſi x ſit quantitas infinite parva, termini quos attingit DE erunt ejuſdem ordinis, reliqui vero erunt terminis attactis infinite majores vel minores prout jacent infra vel ſupra rectam DE. Atque hinc tandem oritur ſolutio Problematis: ſcilicet quum æquatio aliqua proponitur, pone $y = x^n$, $y = x^{n-1}$, $y = x^{n-2}$, $y = x^{n-3}$, &c. neglectis coefficientibus. Terminos æquationis reſultantes eodem modo diſpone, quo in Schemate, cuique locum proprium adſcribendo pro ratione indicis: ad horum terminorum ſic diſpoſitorum duos vel plures applicetur regula, ita ut omnes reliqui cadant ſupra vel infra regulam, prout quæris ſeriem ex aſcendentibus vel deſcendentibus ipſius x dignitatibus confectam. Et termini quos attingit regula erunt maximi ejuſdem ordinis. Q. E. I.

Si quando forte accidit, quod indices ipſius x ſint fracti, vel etiam ſi vis ſurdi, & nimis operoſum foret eos tollere; ſubdividendæ ſunt partes lineæ CD: & inde erigendo normales, in earum cum reliquis concurſu diſponendæ ſunt poteſtates quarum indices fracti ſunt vel ſurdi. Hujus eadem ac Propoſitionis eſt demonſtratio.

Coroll.

Coroll. 1. Supponamus terminos omnes infra rectam DE abesse. Et (per hanc Propositionem) termini x^5, x^{n+3}, x^{2n+1}, x^{3n-1}, x^{4n-3} & x^{5n-5} quos attingit Regula, erunt maximi ejusdem ordinis modo supponatur x infinite parva; & inde eorum indices necessario æquantur; hoc est, $n+3=5$, $2n+1=5$, $3n-1=5$, $4n-3=5$, & $5n-5=5$: harum quinque æquationum quælibet dabit $n=2$. Æquetur jam numerus 5 indici termini cujusvis alius supra rectam DE positi; sit exempli gratiâ $2n+3=5$, erit $n=1$; sit $4n=5$, erit $n=\frac{5}{4}$; sit $5n+5=5$, erit $n=0$; sit $3n+4=5$, erit $n=\frac{1}{3}$. Vides igitur quod æquando omnes indices numero 5 (qui hic ponitur index infimæ dignitatis ipsius x) valor ipsius n verus, est omnium valorum sic prodeuntium maximus, reliqui tamen vero valore semper prodeunt minores.

Coroll. 2. Cum itaque æquatio aliqua proponitur, & quæritur ejus radix in serie eo citius convergente quo minor est x, sit λ index infimæ potestatis ipsius x quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur; hoc est, sit λ index infimæ dignitatis ipsius x in rectâ CD positæ; pone $y=x^n$, $\dot{y}=x^{n-1}$, $\ddot{y}=x^{n-2}$, &c. Et, hisce valoribus in æquatione substitutis, æquentur omnes indices terminorum sic resultantium indici λ, & valor ipsius n omnium maximus inde proveniens, erit index ipsius x in primo termino seriei quæsitæ.

Est-

Estque hæc altera D. *Neutoni* methodus pro inveniendo indice termini primi.

Coroll. 3. Supponamus jam terminos omnes infra rectam DE jacere, & reliquos abesse, s qui nunc est index altissimæ dignitatis earum quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum potestates aliquas multiplicantur, æquatus indici cujusvis termini in rectâ DE positi semper dabit $n=2$, ut antea in *Corollario* primo. Æquetur autem s indici dignitatis alicujus ipsius x infra rectam DE jacentis; sit verbi gratia, $n+1=s$, erit $n=4$; Sit $2n-3=s$, erit $n=4$; sit $n-3=s$ & erit $n=8$. Constat ergo quod 2 verus ipsius n valor, est omnium sic provenientium semper minimus. Unde duco regulam sequentem.

Coroll. 4. Si quæritur series eo citius convergens quo major est x, sit $y=x^n$, $\dot{y}=x^{n-1}$, $\ddot{y}=x^{n-2}$, &c. hosce valores in æquatione substitue, & terminorum omnium resultantium indices æquentur ipsi λ (indici altissimæ dignitatis ipsius x, quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur) atque valor ipsius n omnium minimus hoc modo inventus, est index ipsius x in primo seriei termino.

Methodus hæc pro inveniendo indice primi termini seriei ex descendentibus ipsius x dignitatibus confectæ, similis est methodo D. *Neutoni* in Corollario secundo expositæ, pro inveniendo

endo indice termini primi in serie ubi potestates ipsius x perpetuo sunt ascendentes; earum vero neutra haud adeo generalis est, uti ex Parallelogrammo facile cuivis videre est.

Coroll. 5. Terminos quos attingit recta DE appello *primi ordinis terminos*. Moveatur recta illa DE motu parallelo, & simul tanget terminos x^4, x^{n+2}, x^{2n}, x^{3n-2}, x^{4n-4}: hi sunt *termini secundi ordinis*; x^3, x^{n+1}, x^{2n-1}, x^{3n-3} x^{4n-5} sunt *tertii ordinis termini*; x^2, x^n, x^{2n-2}, x^{3n-4} sunt *quarti ordinis*: & sic in infinitum. Terminos enim *ejusdem ordinis* recta DE motu parallelo lata simul tanget. Et sicut radix extracta ex terminis primi ordinis, dat terminum seriei primum; sic radix extracta ex terminis primi & secundi ordinis, dat terminos duos primos, radix extracta ex terminis primi, secundi & tertii ordinis dat terminos tres primos; & sic in infinitum. Unde si in æquatione desint termini ordinum aliquorum intermediorum, termini seriei respectivi habebuntur extrahendo radicem ex terminis æquationis ordinum superiorum. Desint, verbi gratiâ, termini tertii, quarti, quinti & sexti ordinis, & radix extracta ex terminis primi & secundi ordinis dabit primos sex seriei terminos. Hæc observatio operationi aliquando compendium subministret: exemplis vero in sequentibus illustrabitur.

Coroll. 6. Ex hâc Propositione invenire licet nnmerum radicum, quas æquatio Fluxiones involvens habere potest, & quibus plures habere

nequit. Nam termini maximi ejusdem ordinis dant valorem ipsius y cum x est infinite magna vel infinite parva. Et (per Coroll. 5. Prop. 1.) numerus valorum ipsius y in omni Abscissæ x magnitudine idem semper est. Ergo æquationis, quæ dat y, cum x est infinite parva vel infinite magna, numerus radicum, æqualis est numero radicum quas æquatio proposita habere potest, & quibus plures habere nequit.

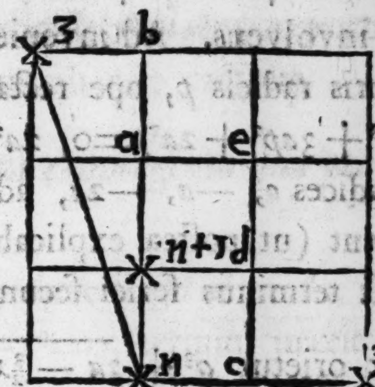
Adeoque etiam innotescit numerus radicum æquationis hujusmodi $y^x+ax^y=a$, ubi indeterminatarum indeterminatæ sunt coefficientes; nam ejusmodi æquatio transmutari potest in Fluxionalem.

Aliquando accidit, quod ad inveniendum primum terminum seriei, prodeunt duæ æquationes diversarum dimensionum: in illis casibus dimensio maxima semper dat numerum radicum æquationis propositæ.

Exemplum Primum.

ÆQuationis $y^3-a^2y+axy-x^3=0$ extrahendæ sint radices. Ut inveniatur index termini primi seriei quæsitæ, pone $y=x^n$, eritque $y^3=x^{3n}$, $xy=x^{n+1}$. Terminis hisce dicto modo dispositis in punctis angularibus Parallelogrammi, video exteriorum tres casus accidere: scilicet, sunt x^3, x^n; x^n, x^{3n}, vel x^3, x^{3n} termini reliquis exteriores. Æquentur indices, & erit 1^mo^. $n=3$, 2^do^. $n=0$, & 3^tio^. $n=1$; igitur

tur si quæritur series ex dignitatibus ascendentibus confecta, potest esse 3 vel 0 index ipsius x in primo termino seriei. Moveatur recta $x^n\, x^3$ motu parallelo, & ea primo perveniet ad x^{n+1} terminum unicum secundi ordinis, secundo perveniet ad angulum a, tertio ad b, c simul, quarto ad d, quinto ad e & ultimo ad x^{3n} terminum ordinis infimi. Cum igitur desint termini ordinis tertii, quarti, quinti & sexti: invenientur primi sex seriei termini (per *Coroll.* 5. Prop. 2.) extrahendo radicem ex terminis $-a^2y+axy-x^3$ primi & secundi ordinis positis nihilo æqualibus. Hoc vero per Divisionem fit, nam si sit æquatio $-a^2y+axy-x^3=0$, erit $y=\frac{x^3}{-a^2+ax}$ adeoque dividendo est



$$y=\frac{-x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3}-\frac{x^5}{a^4}-\frac{x^6}{a^5}-\frac{x^7}{a^6}-\frac{x^8}{a^7}-\&c.$$ hi sunt primi sex termini per divisionem inventi: terminus septimus invenietur esse $\frac{-2x^9}{a^8}$. Hic divisionem inchoavi à termino a^2 quoniam ponitur x admodum parva.

In casu secundo erat $n=0$, pro y itaque in æquatione substitue Ax^0, vel quod idem est A, ubi A est quantitas determinanda statim invenienda. Et orietur $A^3 - a^2A+axA-x^3=0$ evanescat jam x & erit $A - a^2A=0$, unde est $A=0$, vel $A=\pm a$: igitur ter-

 minus

minus primus potest esse $+a$ vel $-a$: valor p spectat ad radicem jam inventam. Pone p æqualem terminis nondum inventis & erit $y=a+p$ quem ipsius y valorem in æquatione substituendo orietur æquatio $p^3+\overline{3ap^2+2a^2+ax}\times p+a^2x-x^3=0$ indeterminatas x, p involvens. Ad inveniendum terminum primum valoris radicis p, ope rectanguli habebimus æquationes $p^3+3ap^2+2a^2p=0$, $2a^2p+a^2x=0$, æquationis illius radices 0, $-a$, $-2a$, ad seriem quæsitam non pertinent (ut postea explicabitur) hujus vero radix $-\frac{1}{2}x$ est terminus seriei secundus. Pone igitur $p=q-\frac{1}{2}x$, & orietur $q^3+\overline{3a-\frac{3}{2}x}\times q^2+\overline{2a^2-2ax+\frac{3}{4}x^2}\times q+\frac{1}{4}ax^2-\frac{9}{8}x^3=0$, ubi æquatio $2a^2q-\frac{1}{4}ax^2=0$ dat $q=-\frac{x^2}{8a}$ proxime, vel $q=r-\frac{x^2}{8a}$. Hunc valorem pro q substituo, neglectis terminis q^3, $-\frac{3}{2}xq^2$, ut & iis in quibus r erit plusquam unius dimensionis, quos nulli usui futuros satis indicabit ipsa operatio, modo unum vel duos forte seriei terminos plures quærere tantum est animus; & exurget $2a^2r-2axr=\frac{7}{8}x^3-\frac{3x^4}{64a}$ proxime, atque dividendo, erit $r=\frac{7x^3}{16a^2}+\frac{59x^4}{128a^3}$ &c. Ergo $y=a+p=a-\frac{1}{2}x+q=a-\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8a}+r$ $=a-\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8a}+\frac{7x^3}{16a^2}+\frac{59x^4}{128a^3}$ &c. Et si pro primo

ter-

termino usurpassem $-a$, prodiisset $y = -a + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8a}$ $+ \frac{9x^3}{16a^2} + \frac{69x^4}{128a^3}$ &c.

Hic notandum est quod primi tres termini prodeunt rejiciendo x^3, & ex terminis reliquis $y^3 - a^2y + axy = 0$; id est, ex $y^2 - a^2 + ax = 0$ extrahendo radicem.

Radix unica in serie eo citius convergente quo major est x.

In tertio casu erat n unitas, pone ergo $y = Ax$, & orietur $A^3x^3 - a^2Ax + aAx^2 - x^3 = 0$, termini maximi $A^3x^3 - x^3$ ejusdem ordinis positi æquales nihilo dant $A = 1$; ergo est x primus terminus seriei. Pone $y = x + p$, & resultabit $p^3 + 3xp^2 + \overline{3x^2 + ax - a^2} \times p + ax^2 - a^2x = 0$, ubi termini $3x^2p$, ax^2 positi æquales nihilo dant $p = -\frac{1}{3}a$ fere, vel $p = q - \frac{1}{3}a$: hunc ipsius p valorem substituendo, resultabit æquatio $q^3 + \overline{3x - a} \times q^2 + \overline{3x^2 - ax - \frac{2}{3}aa} \times q - \frac{8}{27}a^2x + a^3 = 0$, ubi termini $3qx^2$, $-a^2x$ dant $\frac{aa}{3x}$ pro termino tertio. Pone $q = r + \frac{aa}{3x}$, & illum valorem substituendo, neglectis terminis nulli usui futuris, habebis $\overline{3x^2 - ax} \times r = \frac{1}{27}a^3 - \frac{a^4}{9x}$ fere, unde $r = \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3}$ &c. Adeoque est

$$y = x - \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3} \text{ \&c.}$$

Exem-

Exemplum Secundum.

IN hoc Exemplo indices reperiuntur ope *Cor.*4. *Prop.*2.

Ex æquatione $x^3\dot{y} + ay\dot{x}x + a^2\dot{x}x - 2a^3\dot{x} = 0$ extrahendo ſit radix y in ſerie ubi indices ipſius x perpetuo magis deſcendunt. Fluat x uniformiter, & ſit $\dot{x} = 1$, atque æquatio evadet $x^3\dot{y} + axy + a^2x - 2a^3 = 0$. Pone $y = Ax^n$, erit $\dot{y} = nAx^{n-1}$, atque proveniet æquatio $nAx^{n-2} + aAx^{n+1} + a^2x - 2a^3 = 0$. Terminus jam altiſſimæ dignitatis in quo nec $\dot{y}$ neque y reperitur eſt a^2x, ubi index ipſius x eſt unitas: æquentur igitur indices terminorum reliquorum unitati, eritque 1^{mo}, $n+2 = 1$, unde $n = -1$; 2^{do}, erit $n+1 = 1$, unde $n = 0$, quorum valorum minimus -1, eſt index ipſius x in primo termino ſeriei, & termini nAx^{n+2}, a^2x, vel $-Ax$, $+a^2x$ poſiti æquales nihilo dant $A = a^2$, unde eſt $\frac{a^2}{x}$ primus terminus ſeriei.

Operatio Secunda.

PRO terminis reliquis pone p, & erit $y = p + a^2x^{-1}$ $\dot{y} = \dot{p} - a^2x^{-2}$, unde orietur $x^3\dot{p} + axp - a^3 = 0$: ubi p, $\dot{p}$, vices ſubeunt ipſarum y, $\dot{y}$ in æquatione primâ. Sit $p = Ax^n$, $\dot{p} = nAx^{n-1}$; & prodibit $nAx^{n+2} + aAx^{n+1} - a^3 = 0$; terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur eſt a^3, ubi index ipſius x eſt 0; ſit igitur $n+2 = 0$, & erit $n = -2$; Sit $n+1 = 0$, & erit $n = -1$;

quo

quorum numerorum minimus -2 est index ipsius x in secundo termino: & termini nAx^{n+2}, $-a^3$ positi æquales nihilo dant $A = \frac{1}{n}a^3x^{-2-n} = -\frac{1}{2}a^3$; ergo terminus secundus est $-\frac{a^3}{2x^2}$.

Operatio Tertia.

Pone $p = q - \frac{1}{2}a^3x^{-2}$, erit $\dot{p} = \dot{q} + a^3x^{-3}$, quos valores substituendo, orietur æquatio $x^3\dot{q} + axq - \frac{1}{2}a^4x^{-1} = 0$. Pone $q = Ax^n$, $\dot{q} = nAx^{n-1}$, & exurget $nAx^{n+2} + aAx^{n+1} - \frac{1}{2}a^4x^{-1} = 0$, Terminus unicus in quo nec q neque $\dot{q}$ reperitur est $-\frac{1}{2}a^4x^{-1}$, ubi index ipsius x est -1; jam ponendo $n+2 = -1$, erit $n = -3$; & ponendo $n+1 = -1$, erit $n = -2$, quorum minimus -3 est index quem quærimus, & termini nAx^{n+2}, $\frac{1}{2}a^4x^{-1}$, (quorum indices inter se æquati dant verum ipsius n valorem) positi æquales nihilo dant $A = -\frac{1}{6}a^4$ & inde terminus tertius est $-\frac{a^4}{6x^3}$.

Operatio Quarta.

Sit $q = r - \frac{1}{6}a^4x^{-3}$, $\dot{q} = \dot{r} + \frac{1}{2}a^4x^{-4}$, & evadet æquatio $x^3\dot{r} + axr - \frac{1}{6}a^5x^{-2} = 0$, ex quâ æquatione invenies terminum quartum esse $-\frac{a^5}{24x^4}$. Est igi-

igitur $y = \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} - \frac{a^4}{6x^3} - \frac{a^5}{24x^4} -$ &c. hoc est,

$$y = \frac{a^2}{1.x} - \frac{a^3}{1.2.x^3} - \frac{a^4}{1.2.3.x^3} - \frac{a^5}{1.2.3.4.x^4}$$

$$- \frac{a^6}{1.2.3.4.5.x^5} \text{ \&c.}$$

Methodus hæc sigillatim inveniendi terminos est ad modum generalis, at plerumque nimis operosa. Est autem alia Methodus hasce radices extrahendi, quæ consistit in assumptione seriei universalis hujusmodi $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$ &c. & inde determinando Exponentes n, r, & Coefficientes A, B, C, D, &c. Hujus Methodi, longo tempore postquam D. *Neutono* innotuit, in Actis Eruditorum *Lipsiæ* D. *Leibnitius*, suo etiam nomine edidit Exemplum unum aut alterum in casibus facilioribus, ubi tantum docuit Coefficientium inventionem; at in indicum non in coefficientium inventione jacebat difficultas. Ideoque D. *Taylor*, in *Prop.* 9. Methodi *Incrementorum*, priusquam Coefficientes determinat, formam seriei invenire aggreditur. Estque ut sequitur.

Inveniatur (per *Prop.* 2. vel ejus *Coroll.*) index termini primi, vocetur is n, in æquatione pro $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. scribe x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, &c. respective, adeo ut termini resultantes componantur omnes ex x & datis quantitatibus: sit r maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, & forma seriei erit hæc $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} +$ &c. Erit vero r negativa aut affirmativa, prout quæris seriem

ex-

ex dignitatibus ipſius x deſcendentibus aut aſcendentibus confectam.

Exemplum Tertium.

Æquationis $y^3 + axy - x^3 = 0$, quæratur radix cum x eſt admodum magna. Invenio (per *Prop.* 2.) unitatem eſſe indicem ipſius x in primo termino ſeriei: pone igitur $y = x$, & æquatio evadet $x^3 + ax^2 - x^3 = 0$. Horum indicum 2, 3, 3 maximus communis diviſor eſt unitas, ergo ſeriei forma erit $y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + Ex^{-3} +$ &c. Sequitur operatio.

$$
\begin{array}{r|l}
y^3 = & A^3x^3 + 3A^2Bx^2 \begin{array}{l} + 3A^2C \\ + 3AB^2 \end{array}\Big\} x \begin{array}{l} + 3A^2D \\ + 6ABC \\ + BBB \end{array}\Bigg\} x^0 \\
 & \begin{array}{l} + 3A^2E \\ + 6ABD \\ + 3AC^2 \\ + 3B^2C \end{array}\Bigg\} x^{-1} + \text{\&c.} \\
-x^3 = & -x^3 \\
+axy = & \quad * \quad + aAx^2 \quad + aBx \quad + aCx^0 \\
 & + aDx^{-1} + \text{\&c.}
\end{array}
$$

Comparando Coefficientes terminorum homologorum, erit $A^3 = 1$, unde $A = 1$. $3A^2B + aA = 0$, unde $B = -\frac{1}{3}a$. $3A^2C + 3AB^2 + aB = 0$, unde $C = 0$. $3A^2D + B^3 = 0$, unde $D = \frac{1}{81}a^3$. $3A^2E + 6ABD + aD = 0$, unde $E = \frac{1}{243}a^4$. &c. Ergo $y = x - \frac{1}{3}a + \frac{a^3}{81x^2} + \frac{a^4}{243x^2} +$ &c.

 Exem-

Exemplum Quartum.

EX æquatione $\dot{x}^2y^2 - 3x^2\dot{x}\dot{y} + 2x^2\dot{x}^2 - ax\dot{y}^2 + a^2\dot{x}^2 = 0$, extrahenda sit radix y in serie eo citius convergente quo major est x. Invenio formam seriei fore $y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + Ex^{-3} +$ &c. Fluat x uniformiter, existente $\dot{x} = 1$, ut in casibus hujusmodi vulgo fit; & evadet æquatio $y^2 - 3x^2\dot{y} + 2x^2 - ax\dot{y}^2 + a^2 = 0$. Sequitur operatio.

$$\begin{array}{r|l}
y^2 = & A^2x^2 + 2ABx \left.\begin{matrix} +2AC \\ +2AB \end{matrix}\right\} x^0 \left.\begin{matrix} +2AD \\ +2BC \end{matrix}\right\} x^{-1} \\
& \left.\begin{matrix} +2AE \\ +2BD \\ +CC \end{matrix}\right\} x^{-2} + \&c. \\
-3x^2\dot{y} = & -3Ax^2 \quad * \quad +3Cx^0 \quad +6Dx^{-1} \\
& +9Ex^{-2} + \&c. \\
+2x^2 = & +2x^2 \\
-ax\dot{y}^2 = & \quad * \quad -aA^2x \quad * \quad -2aACx^{-1} \\
& -4aADx^{-2} - \&c. \\
+a^2 = & \quad * \quad * \quad +a^2x^0
\end{array}$$

Ex comparatione Coefficientium invenio

$A = 1$, $B = \frac{1}{2}a$, $C = -\frac{1}{4}aa$, $D = -\frac{1}{32}a^3$, $E = -\frac{5}{352}a^4$, &c.

$A = 2$, $B = a$, $C = -\frac{2}{7}aa$, $D = -\frac{2}{35}a^3$, $E = -\frac{104}{3185}a^4$, &c.

$$\text{Ergo } y = \begin{cases} x + \frac{1}{2}a - \dfrac{a^2}{4x} - \dfrac{a^3}{32x^2} - \dfrac{5a^4}{352x^3} \ \&c. \\[2ex] 2x + a - \dfrac{2a^2}{7x} - \dfrac{2a^3}{35x^2} - \dfrac{104a^4}{3185x^3} \ \&c. \end{cases}$$

Radi-

Radices ejusdem æquationis cum x *est valde parva.*

Invenietur forma seriei hæc, $y = Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{1} + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^{2} + Ex^{\frac{5}{2}} +$ &c. Sequitur operatio.

$$
\begin{array}{r|l}
+aa = & +aa \\
-axy^2 = & -\frac{1}{4}aA^2 - aABx^{\frac{1}{2}} \left.\begin{array}{l} -\frac{3}{2}aAC \\ -aBB \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} -2aAD \\ -2aBC \end{array}\right\} x^{\frac{2}{3}} \\
 & \left.\begin{array}{l} -\frac{5}{2}aAE \\ -4aBD \\ -\frac{9}{4}aCC \end{array}\right\} x^2 - \&c. \\
+yy = & \quad * \qquad * \qquad A^2x \qquad + -ABx^{\frac{3}{2}} \\
 & \left.\begin{array}{l} +2AC \\ +BB \end{array}\right\} x^2 + \&c. \\
-3x^2y = & \quad * \qquad * \qquad * \qquad -\frac{3}{2}Ax^{\frac{3}{2}} \\
 & -3Bx^2 - \&c. \\
+2x^2 = & \quad * \qquad * \qquad * \qquad * \\
 & +2x^2
\end{array}
$$

$$
\text{Unde}\left\{\begin{array}{l}
A = +2\sqrt{a},\ B = 0,\ C = +\dfrac{4\sqrt{a}}{3a},\ D = -\dfrac{3}{4a}, \\
E = +\dfrac{2\sqrt{a}}{3aa}, \ \&c. \\
A = -2\sqrt{a},\ B = 0,\ C = -\dfrac{4\sqrt{a}}{3a},\ D = -\dfrac{3}{4a}, \\
E = -\dfrac{2\sqrt{a}}{3aa}, \ \&c.
\end{array}\right.
$$

$$
\text{Ergo } y = \left\{\begin{array}{l}
+2\sqrt{ax} + \dfrac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \dfrac{3x^2}{4a} + \dfrac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa} \ \&c. \\
-2\sqrt{ax} - \dfrac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \dfrac{3x^2}{4a} - \dfrac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa} \ \&c.
\end{array}\right.
$$

 Sed

Sed ut verum quod eſt confiteamur, hæc methodus D. *Taylor* inveniendi formam ſeriei non eſt generalis. Imo impoſſibile eſt univerſaliter determinare formam ſeriei ex datâ formâ æquationis; pendet enim forma ſeriei tam ex coefficientibus, quam ex exponentibus indeterminatarum in æquatione. Sint enim duæ æquationes $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 + x^2y = 0$, $y^3 - ay^2 + a^2y - a^3 + x^2y = 0$ eædem omnino quoad formam, in priore eſt $y = a - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}}$ &c. in poſteriore eſt $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2a^3}$, &c. Et juxta Regulam D. *Taylor*, utraque ſeries habere debet eandem formam, quam habet poſterior. Fallit dicta Regula quotieſcunque coincidunt duo vel plures valores termini primi ſeriei: hoc eſt, quando ordinata prima tangit curvam vel tranſit per punctum ejus duplex: vel quando ordinata ad diſtantiam infinitam tranſit per plura curvæ puncta infinite propinqua ad ſe invicem. Inveni autem ſequentem regulam pro inveniendâ formâ ſeriei quantum hactenus conſtitit nunquam fallere, ſed illam eſſe ubique veram affirmare non audeo, propterea quod in eam caſu tantum incidi, (obſervando ſcilicet plurimas ſeries diverſas) & ejus demonſtrationem poſtea fruſtra quæſivi.

Methodus determinandi formam Seriei.

INveniatur index primi termini, vocetur is n, in æquatione pro y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, &c. ſcribe x^n, x^{n-1}, x^{n-2} &c. re-

respective, adeo ut termini resultantes componantur ex x & datis quantitatibus: sit m maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, p numerus valorum primi termini qui inter se æquantur, & $r = \frac{m}{p}$, atque forma seriei hæc erit $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} +$ &c.

Coincidit hæc regula cum regula D. *Taylor* quando p est unitas, hoc est, quando primus terminus non habet plures valores æquales.

Exemplum Quartum.

Ex æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$, extrahenda sit radix y in serie eo citius convergente quo major est x. Invenies ope rectanguli primum terminum esse x, quem scribe pro y & æquatio evadet $x^3 - 2x^3 + x^3 - a^3 = 0$. Indices terminorum sunt 3, 3, 3, 0, quorum maximus communis divisor est 3. & æquatio $y^3 - 2xy^2 + x^2y = 0$ quæ dat primum terminum habet duas radices inter se æquales; igitur est $m = 3$, $p = 2$, & $\frac{m}{p} = \frac{3}{4} = r$, unde forma seriei hæc est $y = Ax + Bx^{-\frac{1}{2}} + Cx^{-2} + Dx^{-\frac{1}{2}} +$ &c.

Estque

Eſtque operatio ut ſequitur.

$$
\begin{array}{r|l}
y^3 = & A^3x^3 + 3A^2Bx^{+\frac{3}{2}} \left.\begin{array}{l} +3A^2C \\ +3AB^2 \end{array}\right\} x^0 \left.\begin{array}{l} +3A^2D \\ +6ABC \\ +B^3 \end{array}\right\} x^{--\frac{3}{2}} \\
 & \left.\begin{array}{l} +3A^2E \\ +6ABD \\ +3AC^2 \\ +3B^2C \end{array}\right\} x^{--3} + \&c. \\
-2xy^2 = & -2A^3x^3 - 4ABx^{\frac{3}{2}} \left.\begin{array}{l} -4AC \\ -2B^2 \end{array}\right\} x^0 \left.\begin{array}{l} -4AD \\ -4BC \end{array}\right\} x^{-\frac{3}{2}} \\
 & \left.\begin{array}{l} -4AE \\ -4B'D \\ -2CC \end{array}\right\} x^{--3} - \&c. \\
+x^2y = & \quad Ax^3 \quad + Bx^{\frac{3}{2}} \quad + Cx^0 \quad + Dx^{--\frac{3}{2}} \\
 & + Ex^{--3} + \&c. \\
-a^3 = & \qquad\qquad\qquad - a^3x^0
\end{array}
$$

Primo igitur habemus æquationem, $A^3 - 2A^2 + A = 0$, unde eſt $A = +1$, $A = +1$, & $A = 0$. Secundo eſt $3A^2B - 4AB + B = 0$, vel $3B - 4B + B = 0$, ſed inde nihil colligitur. Tertio eſt $3A^2C + 3AB^2 - 4AC - 2B^2 + C - a^3 = 0$, vel $3AB^2 - 2B^2 - a^3 = 0$, unde eſt $B = \pm a^{\frac{3}{2}}$, Quarto eſt $3A^2D + 6ABC + B^3 - 4AD - 4BC + D = 0$, id eſt, $6ABC + B^3 - 4BC = 0$, ergo eſt $C = -\dfrac{a^3}{2}$, Et quinto invenietur $D = \dfrac{7}{8}a^{\frac{5}{2}}$ quando pro B ſcribitur $+a^{\frac{3}{2}}$, Sed erit $= -\frac{7}{8}a^{\frac{5}{2}}$, quando pro B ſcribitur $-a^{\frac{3}{2}}$. Adeoque eſt radix

$y =$

$$y = \begin{cases} x + \dfrac{aa}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^3}{2x^2} + \dfrac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \text{ \&c.} \\ x - \dfrac{aa}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^3}{2x^2} - \dfrac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \text{ \&c.} \end{cases}$$

Hic in determinatione Coefficientium obſervandum eſt quod ex ſecundâ æquatione $3A^2B - 4AB + B = 0$ terminus ſecundus B non reperiebatur. Idem ſemper notandum eſt quotieſcunque terminus primus habet plures valores inter ſe æquales. Nam ſi termini primi omnes valores ſunt inter ſe diverſi, terminus ſecundus & reliqui omnes in infinitum habebunt niſi unicum valorem & per diviſionem ſemper prodibunt. At ſi terminus primus habet plures valores inter ſe æquales, tot diverſos valores neceſſario habebit terminus ſecundus; qui itaque per diviſionem inveniri nequit, ſed radix erit æquationis tot dimenſionum quot ipſe habet valores. Unde in comparatione Coefficientium ſecundus terminus B ex æquatione ſecundâ non ſemper invenitur: Sed ponendo Coefficientes terminorum homologorum æquales nihil, membra omnia ſe mutuo ſemper deſtruent uſque dum pervenietur ad terminum in cujus coefficiente reperitur terminus ſecundus tot dimenſionum quot ipſe habet valores. Sed hæc omnia experientiâ multo melius quam verbis patebunt.

Conſiderando Curvarum Tangentes, Curvaturam, Variationem Curvaturæ, Variationem Vari-

Variationis, *&c.* quæ determinari solent Fluxionum ope, determinari etiam posse ope terminorum seriei, ut innuit D. *Neutonus* ad Prop. 10. Lib. 2. *Principiorum*; statim cognovi Incrementa prima, secunda, tertia, *&c.* relationem quandam habere ad seriei terminos respectivos, adeoque terminos illos determinari ex Fluxionibus. Ideo quærebam relationem illam & tandem inveni ut sequitur.

PROP. III. THEOR.

SIT $y = A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} +$ &c. erit

$$B = \frac{\dot y}{1.r\dot x},\quad C = \frac{\ddot y}{1.2.r^2\dot x^2},\quad D = \frac{\dddot y}{1.2.3.r^3\dot x^3}$$

$$E = \frac{\ddddot y}{1.2.3.4.r^4\dot x^4}\ \text{\&c. adeoque est}\ y = A + \frac{x\dot y}{1.r\dot x}$$

$$+ \frac{x^2\ddot y}{1.2.r^2\dot x^2} + \frac{x^3\dddot y}{1.2.3.r^3\dot x^3} + \text{\&c.}$$

Demonstratio.

Fluat x^r uniformiter, & sit ejus Fluxio $rx^{r-1}\dot x = 1$, vel $\dot x = \frac{1}{r}x^{1-r}$. Et erit $\dot y = rBx^{r-1}\dot x + 2rCx^{2r-1}\dot x + 3rDx^{3r-1}\dot x + 4rEx^{4r-1}\dot x +$ &c. ubi si pro $\dot x$ ponas ejus valorem $\frac{1}{r}x^{1-r}$ erit $\dot y = B + 2Cx^r + 3Dx^{2r}$

$+4E$

$+4Ex^{3r}+$ &c. Et inde $\ddot{y}=2rCx^{r-1}\dot{x}+6rDx^{2r-1}\dot{x}$ $+12rEx^{3r-1}\dot{x}+$ &c. vel ponendo pro $\dot{x}$, $\frac{1}{r}x^{1-r}$ $\ddot{y}=2C+6Dx^{r}+12Ex^{2r}+$ &c. unde $\dddot{y}=6rDx^{r-1}\dot{x}$ $+24rEx^{2r-1}\dot{x}+$ &c. id est, $\dddot{y}=6D+24Ex^{r}+$ &c. adeoque $\ddddot{y}=24rEx^{r-1}\dot{x}+$ &c. $=24E+$ &c. Jam sit x infinite magna vel infinite parva, prout r est numerus negativus aut affirmativus, & erit accurate $\dot{y}=B$, $\ddot{y}=2C$, $\dddot{y}=6D$, $\ddddot{y}=24E$, &c. ergo vicissim est $B=\dot{y}$, $C=\frac{1}{2}\ddot{y}$, $D=\frac{1}{6}\dddot{y}$, $E=\frac{1}{24}\ddddot{y}$, &c. Hisce valoribus ipsorum B, C, D, E, &c. substitutis orietur $y=A+x^{r}\dot{y}+\frac{1}{2}x^{2r}\ddot{y}+\frac{1}{6}x^{3r}\dddot{y}+\frac{1}{24}x^{4r}\ddddot{y}+$ &c. Sed erat $\dot{x}=\frac{1}{r}x^{1-r}$, ideoque est $x^{r}=\frac{x}{\dot{x}r}$ quem ipsius x^{r} valorem substitue ut termini evadant homogenei, & prodibit

$$y=A+\frac{x\dot{y}}{1.r\dot{x}}+\frac{x^{2}\ddot{y}}{1.2.r^{2}\dot{x}^{2}}+\frac{x^{3}\dddot{y}}{1.2.3.r^{3}\dot{x}^{3}}$$

$$+\frac{x^{4}\ddddot{y}}{1.2.3.4.r^{4}\dot{x}^{4}}+\text{\&c. Q. E. D.}$$

Coroll. Sit $y=Ax^{n}+Bx^{n+r}+Cx^{n+2r}+Dx^{n+3r}$ $+$ &c. id est $y=x^{n}\times\overline{A+Bx^{r}+Cx^{2r}+Dx^{3r}+\&c.}$ pone $y=vx^{n}$, & erit $v=A+Bx^{r}+Cx^{2r}+Dx^{3r}+$ &c. Uunde per hanc Propositionem est $v=A+\frac{x\dot{v}}{1.r\dot{x}}$

$+ \frac{x^2\ddot{v}}{1.2.r^2\dot{x}^2} + \frac{x^3\dddot{v}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3} +$ &c. Ergo est $y = x^n \times \overline{A}$

$\overline{+ \frac{x\dot{v}}{1.r\dot{x}} + \frac{x^2\ddot{v}}{1.2.r^2\dot{x}^2} + \frac{x^3\dddot{v}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3} + \text{\&c.}}$ Ut habeantur Fluxiones ipsius v, pro y in æquatione substitue vx^n, & orietur æquatio nova relationem inter x & v definiens, ex qua invenies fluxiones illas.

Exemplum Primum.

Ex æquatione $y^4 - a^3y = ax^3 - a^3x$ extrahenda sit radix y. Invenio formam seriei fore $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. adeoque est $r = 1$. Et ideo fluit x uniformiter, unde per methodum Fluxionum directam est $4y^3\dot{y} - a^3\dot{y} = 3ax^2 - a^3$, $4y^3\ddot{y} - a^3\ddot{y} = 6ax - 12y^2\dot{y}^2$, $4y^3\dddot{y} - a^3\dddot{y} = 6a - 24y\dot{y}^3 - 36y^2\dot{y}\ddot{y}$, &c. unde $\dot{y} = \frac{3ax^2 - a^3}{4y^3 - a^3}$, ubi pro x scribe o, & pro y a, ejus valorem cum x est o, & erit $\dot{y} = \frac{-a^3}{4a^3 - a^3} = -\frac{1}{3}$:

$$\ddot{y} = \frac{6ax - 12y^2\dot{y}^2}{4y^3 - a^3} = \frac{-12 \times a^2 \times \frac{1}{9}}{3a^3} = \frac{-4}{9a};$$

$$\dddot{y} = \frac{6a - 24y\dot{y}^3 - 36y^2\dot{y}\ddot{y}}{4y^3 - a^3} = \frac{6a + \frac{24}{27}a - \frac{36 \times 4a}{27}}{3a^3}$$

$= \frac{50}{27a^2}$. In serie generali hosce valores substitue, unitatem pro r & a pro A, atque proveniet $y = a - \frac{1}{3}x - \frac{2x^2}{9a} + \frac{25x^3}{81a^2}$ &c.

Exem-

Exemplum Secuudum.

ÆQuationis $y^3 + a^2y + x^2y - 2a^3 = 0$: quæratur radix y. Invenio formam feriei esse $A + Bx^2 + Cx^4 +$ &c. igitur est $r = 2$, & x^2 fluit uniformiter, id est, $2x\dot{x} = 1$, & $\dot{x} = \frac{1}{2x}$. Capiendo fluxiones erit

$$3y^2\dot{y} + a^2\dot{y} + x^2\dot{y} = -2x\dot{x}y = -y;\ 3y^2\ddot{y} + a^2\ddot{y} + x^2\ddot{y} = -2\dot{y} - 6y\dot{y}^2,\ 3y^2\dddot{y} + a^2\dddot{y} + x^2\dddot{y} = -3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3.$$

Unde $\dot{y} = \frac{-y}{3y^2 + a^2}$, neglecto termino $x^2\dot{y}$, quoniam supponitur x evanefcere; pro y pone a ejus valorem cum est $x = 0$, & erit $\dot{y} = -\frac{1}{4a}$, $\ddot{y} = \frac{-2\dot{y} - 6y\dot{y}^2}{3y^2 + a^2}$

$$= \frac{+\frac{2}{4a} - 6a \times \frac{1}{16a^2}}{4a^2} = \frac{1}{32a^3},\ \dddot{y} = \frac{-3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3}{3y^2 + a^2}$$

$$= \frac{\frac{-3}{32a^3} - 18a \times -\frac{1}{4a} \times \frac{1}{32a^3} + \frac{6}{64a^3}}{4a^2} = \frac{-9}{256a^5}.$$

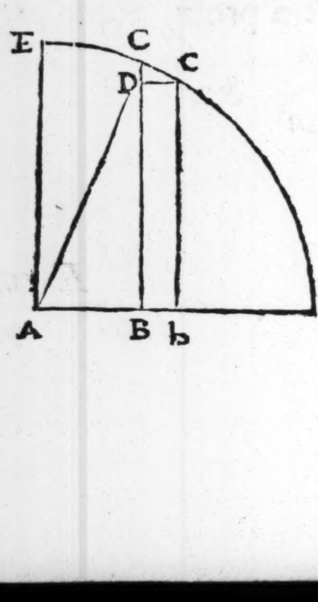
In ferie generali pro A substitue a, & 2 pro r, atque proveniet $y = a - \frac{x^2}{4a} + \frac{x^4}{64a^3} - \frac{3x^6}{512a^5}$ &c.

Exemplum Tertium.

Elevanda ſit binomium $a + x$ ad poteſtatem indeterminatam cujus index eſt n. Pone $y = \overline{a+x}|^n$; unde cum eſt $x = 0$ evadit $y = a^n$, & inde in ſerie generali eſt $A = a^n$. Forma ſeriei hæc eſt $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. ergo eſt $r = \dot{x} = 1$. Capiendo fluxiones erit $a\dot{y} + x\dot{y} = ny$, $a\ddot{y} + x\ddot{y} = \overline{n-1} \times \dot{y}$, $a\dddot{y} + x\dddot{y} = \overline{n-2} \times \ddot{y}$, $a\ddddot{y} + x\ddddot{y} = \overline{n-3} \times \dddot{y}$, &c. Evaneſcat x, & erit $\dot{y} = na^{n-1}$, $\ddot{y} = n \times \overline{n-1} \times a^{n-2}$, $\dddot{y} = n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times a^{n-3}$, $\ddddot{y} = n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times a^{n-4}$, &c. In ſerie generali hoſce valores ſubſtitue a^n pro A & unitatem pro r atque prodibit $y (= \overline{a+x}|^n) = a^n + na^{n-1}x + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}x^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3}x^3$ &c. Hoc modo patet quanta facilitate demonſtratur Theorema D. *Neutoni*.

Exemplum Quartum.

Ex dato arcu EC quæratur ejus Coſinus BC. Sit $EC = x$, $BC = y$, $Cc = \dot{x}$, $DC = \dot{y}$; Erit $AB = \sqrt{1 - y^2}$, exiſtente radio $AE = 1$. Propter ſimilia triangula ABC, CDc, $AC : AB :: Cc : CD$, id eſt, $1 : \sqrt{1-y^2} :: \dot{x} : \dot{y}$, unde erit $\dot{y}^2 = \dot{x}^2 - \dot{x}^2 y^2$. Forma ſeriei



riei hæc eſt $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 +$ &c. quæ continentur in hâc formâ, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ + &c. igitur poteſt x vel x^2 fluere uniformiter quum quæruntur fluxiones ipſius y. Fluat x uniformiter & ſit $\dot{x} = 1$, atque æquatio evadet $\dot{y}^2 = 1 - y^2$, unde $2\dot{y}\ddot{y} = -2y\dot{y}$ vel $\ddot{y} = -y$, & inde $\dddot{y} = -\dot{y}$, $\ddddot{y} = -\ddot{y}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{y} = -\dddot{y}$, &c. Quoniam exiſtente arcu $EC = 0$, fit $y = AE = 1$, pro y ſubſtitue unitatem, & erit $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = -1$, $\dddot{y} = 0$, $\ddddot{y} = 1$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{y} = 0$, &c. In ſerie generali pro hiſce fluxionibus hoſce valores ſubſtitue, unitatem pro A & unitatem pro r, atque proveniet $y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.} +$ &c. Et eodem modo invenire licet ſinum AB ex dato ejus arcu EC.

Ex hoc Exemplo conſtat operationem admodum alleviari ſupponendo x & non x^2 fluere uniformiter. Idem alibi notandum eſt, nam r (quæcunque ſit forma ſeriei) ad libitum fere ſumi poteſt. Ut ſi forma ſeriei quæſitæ eſſet $Ax^{\frac{3}{2}} + Bx^{\frac{7}{2}} + Dx^{\frac{11}{2}} + Ex^{\frac{15}{2}} +$ &c. ubi differentia Exponentium eſt 2, non opus eſt ut ſit $r = 2$, ſed poteſt eſſe quilibet numerorum ſequentium $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, &c.

Methodus hæc reducendi radices æquationum in ſeries convergentes, haud abſimilis eſt methodo aſſumendi ſeriem coefficientibus indeterminatis affectam; at plerumque minus operoſa, præſertim ſi deſiderentur

ſeriej

ſeriei termini tantum pauci initiales: hi ſufficiunt ad inveniendas Tangentes, Radios Curvaturæ Aſymptotos & ſimilia.

De Æquationum Reſolutione in numeris.

HÆC de æquationum reductione Literali dicta ſufficiant, de Numerali itaque adjicere pauca licet.

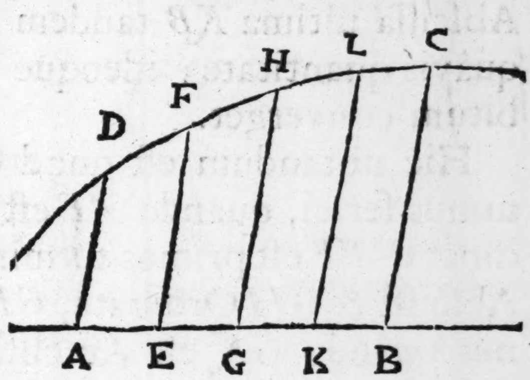
Omnis Æquationum Reductio, uti ſupra diximus, ex hoc pendet, ut primo aſſumatur quantitas radici quæſitæ æqualis proxime, & poſtea ut valor ille aſſumptus corrigatur. Exempli gratiâ, ſit æquatio Cubica $y^3 - 21y - 16 = 0$, cujus radix quæritur; & tentando, vel per Conſtructionem Geometricam invenio eſſe 5 numerum prope verum, itaque pro y ſubſtituo $p + 5$, & provenit æquatio nova $p^3 + 15p^2 + 54p + 4 = 0$; jam quoniam eſt y proxime æqualis 5, erit p quantitas admodum parva, & per conſequens ejus poteſtates altiores, erunt ipſo multo minores; neglectis igitur terminis minoribus p^3, $15p^2$ erit fere $54p + 4 = 0$, vel $p = -\frac{4}{54} = -,074$, ergo $p + 5 = y = 4,926$ proxime. Si quæritur radix magis accurata, pro p ponendum eſt $q - ,074$, atque operationem perficiendo invenies plures figuras radici jam inventæ adnectendas.

Hæc methodus ea eſt quam invenit & in Analyſi ſuâ tradidit D. *Neutonus*. Sunt & aliæ methodi idem perficiendi, qualis eſt ea *J. Ralphſon* & Cl. *Hallei*, ſed ex eâ jam traditâ omnes pendent & facile fluunt.

Hoc

Hoc modo reducuntur æquationes omnes vulgares, in quibus ſcilicet exiſtit unica tantum quantitas ignota: verum etiam æquationes hujuſmodi $y^y + 3^y - 7y = 0$ ſimili modo poſſunt reduci. Sed in æquationes iſtiuſmodi, quarum uſus nondum pene innotuit, tempus impendere jam non vacat. Æquationes fluxionales, quoniam in iis ſemper reperiuntur plures quantitates incognitæ utpote radix extrahenda cum fluxionibus ſuis, dicto modo ſunt irreducibiles. Ut ergo earum radices in numeris haberi poſſunt, ad ſeries confugiendum eſt. Ex ſeriebus enim, quotieſcunque ſat celeriter convergunt, expedite inveniuntur radices æquationum. Si quando non convergunt, tantum opus eſt (monente ipſo *Neutono* ſub finem *Analyſeos*) ut x, ſcilicet quantitas ex cujus poteſtatibus conficitur ſeries, aliquoties adhuc minor ſupponatur; adeoque radix non unica ſed pluribus ſeriebus habenda eſt. Quomodo vero hoc fit, ſtatim erit manifeſtum.

Sit curva DC cujus Abſciſſa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. Et quæratur y vel BC in numeris quando Abſciſſa evadit AB. Reducatur Ordinata in ſeriem, & ſi ſeries illa ſat cito convergat dabitur BC: at ſi non convergat, euſque minui intelligatur x ut



x ut tandem celeriter convergat ſeries; in illâ magnitudine ſit $x = AE$, & ſeries dabit in numeris Ordinatam EF. Jam ſumo novam Abſciſſam $EB = z$, & quæro relationem inter z & y, ex quâ invenietur valor ipſius y in ſerie ex poteſtatibus ipſius z confecta. Si ſeries illa ſat cito convergat, quum eſt $z = EB$, habemus quæſitum; at ſi non convergat, eodem modo minui jam intelligatur z quo prius x, ut convergat ſeries; ſit in illo caſu $z = EG$, & dabitur Ordinata GH. Rurſus ſit Abſciſſa tertia $GB = v$, & quæratur relatio inter v & y, quâ inventâ reducatur y in ſeriem ex dignitatibus ipſius v confectam; quæ ſi non aduc celeriter convergit, minuatur v & ſit ea $= GK$, quæ GK ſit tam parva ut ſeries ad libitum convergat, & dabitur Ordinata KL. Sumo quarto Abſciſſam $KB = u$, & quæro relationem inter u & y, ex quâ invenio valorem ordinatæ y in ſerie, quæ ſi cito convergat habemus ipſam BC quam quærimus. At ſi non convergit eodem modo continue procedere licet quo prius: atque ex tali proceſſu Abſciſſa ultima KB tandem evadet minor datâ quâvis quantitate; ideoque ſeries ultima ad libitum converget.

Hic notandum eſt quod eſt AD primus terminus ſeriei, quando AE eſt Abſciſſa & EF Ordinata, EF eſt primus terminus quando EG eſt Abſciſſa & GH Ordinata, GH eſt primus terminus quando GK eſt Abſciſſa & KL Ordinata, KL eſt primus terminus ſeriei quando KB eſt Abſciſſa & BC Ordinata. Ideoque priuſquam ha-

haberi poteſt Ordinata quævis ſubſequens, neceſſario habendæ ſunt omnes antecendentes, & ergo antequam ordinata *BC* inveniri poſſit, inveniendæ ſunt omnes aliæ. Adjiciendum jam eſſet Exemplum unum aut alterum, ſed methodum hanc per ſe ſatis patentem ducens, tædium calculi evitare inſtitui.

Subnecterem jam quædam de *Præparatione* Æquationum: nam aliquæ Æquationes præpatione indigent antequam earum radices erui poſſunt. In æquationibus Lineas Rationales deſignantibus nullam novi difficultatem ex hactenus dictis facile non tollendam: non item in Æquationibus Fluxiones involventibus. Hæ aliquando præparantur mutando Ordinatam, alias Abſciſſam, aliquando utramque: Sed ſunt æquationes quibus nulla ſufficit præparatio, quantum mihi conſtare potuit: ego de re dubiâ tractare non ſuſcipio. Certe illi quicunque hanc materiam aggreditur prodibunt calculi quorum onus ægre ſuſtinendum eſt.

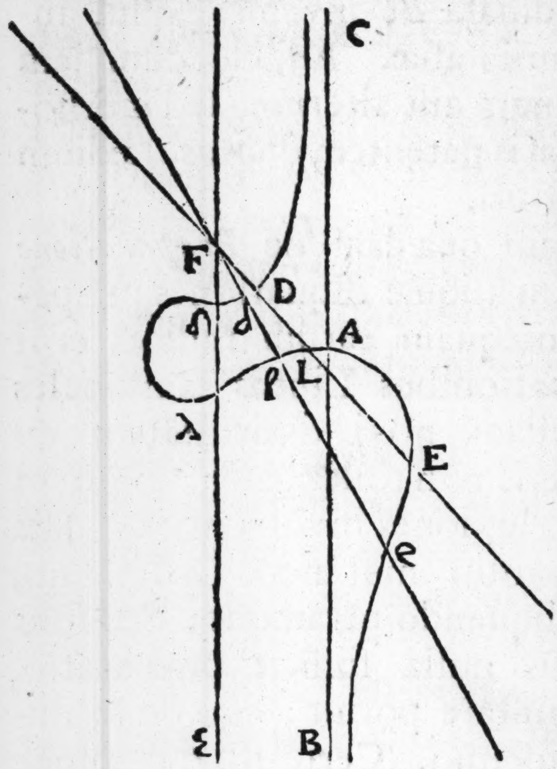
PROP. IV. THEOR.

Aſymptotos recta decuſſare poteſt curvam in totidem punctis, demptis duobus, quot curva eſt dimenſionum & nunquam pluribus.

LInea quævis ſecari poteſt à rectâ in tot punctis quot ipſa eſt dimenſionum & nunquam pluribus, quoniam æquatio tot habere poteſt radices quot ipſa eſt dimenſionum & non plures. Sit jam v.g. linea tertii ordinis Aſymptoton

 ha-

habens *BAC*. Duc rectam quamvis *FDLE* ſecantem curvam in tribus punctis *D*, *L*, *E*. In hac recta ſit punctum quodlibet *F*, circa quod tanquam polum gyretur recta *DE*, per ſitum *Fdle* tandem in ſitum *F* δ λ ε perveniens; ubi eſt Aſymptoto parallela: & *E* unum interſectionis punctum abiit in infinitum: ideoque in illâ poſitione recta $\delta\,\varepsilon$ occurrit curvæ in duobus tantum punctis δ, λ. Moveatur recta $\delta\,\lambda$ motu parallelo donec tandem cum Aſymptoto *BC* coëat, & in illo caſu punctum δ etiam abibit in infinitum: reſtat igitur unicum punctum *A* in quo Aſymptotos curvam decuſſare poteſt. Et ſimiliter in ullo alio caſu oſtendetur duo interſectionis puncta abire in infinitum, hoc eſt, evaneſcere & nullibi reperiri. Proinde reſtabit numerus punctorum, in quibus Aſymptotos decuſſare poteſt curvam, æqualis numero dimenſionum curvæ dempto binario Q. E. D.



Coroll. 1. Linea ſecundi ordinis, id eſt, ſectio Coni ejus Aſymptoton non omnino decuſſat,

Li-

Linea tertii ordinis ejus Aſymptoton decuſſare poteſt in unico tantum puncto, Linea quarti ordinis in duobus & nunquam pluribus. Et ſic in aliis.

Coroll. 2. Linea ſecundi vel tertii ordinis Aſymptoton non tanget, Linea quarti vel quinti ordinis ejus Aſymptoton tangere poteſt in unico puncto. Et ſic porro. Liquet hoc Corollarium exinde quod punctum contactus conflatur ex pluribus interſectionum punctis in unum coeuntibus.

Coroll. 3. Si Linea quarti ordinis tangat ejus Aſymptoton, radius Curvaturæ in puncto contactus ſemper erit finitus: nam punctum illud contactus conflabitur ex duobus tantum interſectionum punctis.

Coroll. 4. Si duo crura Aſymptoton aliquam adjacentia, jaceant ad eaſdem ejus partes, vel ad contrarias & ſimul ad eandem plagam protenſa, tria ad minimum interſectionis puncta abeunt in infinitum.

Coroll. 5. Hinc colligimus maximum numerum Aſymptoton parallelarum quas Linea quævis habere poteſt, æqualem eſſe numero ejus dimenſionum demptâ unitate.

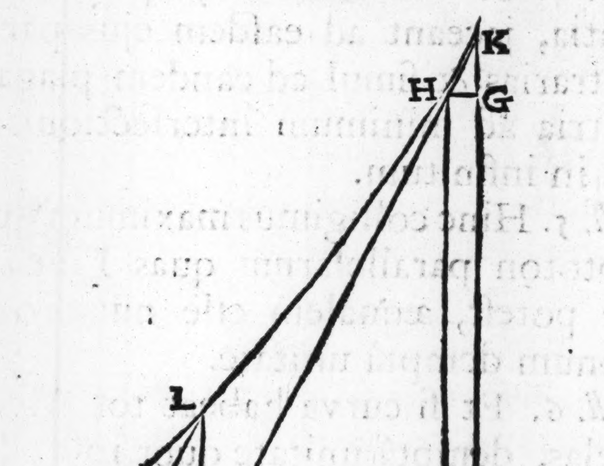
Coroll. 6. Et ſi curva habeat tot Aſymptotos parallelas, demptâ unitate quot ipſa eſt dimenſionum, ea earum nullam ſecare poteſt.

PROP. V. THEOR.

Si Ordinata curvæ parallela ſit Tangenti ad punctum infinite diſtans, Ordinata illa in æquatione curvam definiente non aſcendet ad tot dimenſiones quot eſt curva.

SIT *ALHK* crus curvæ infinitum, Abſciſſa $AC = x$, Ordinata $CL = y$, *DHK* tangens ad *H* punctum infinite diſtans, cui parallela ſit Ordinata $BL = v$, eique ſit correſpondens Abſciſſa $AB = z$. Dico in æquatione ad curvam quod *v* non aſcendet ad tot dimenſiones quot eſt curva.

Per *H* duc Ordinatam *HE*, cui prarallela *KGF*, exiſtente *EF* quam minima, ſit porro *GH*



Abſciſſæ parallela. Concipiatur punctum *L* abire in infinitum, adeo ut coëant puncta *L*, *H*; *B*, *D*;

B, *D*; *C*, *E*; Et in illo casu erit $AE = x$, $EH = y$, $GH = \dot{x}$, $GK = \dot{y}$, $AD = z$, $DH = v$. Reducantur y in seriem hujusmodi $Ax + Bx^{1-n} + Cx^{1-2n} + Dx^{1-3n} +$ &c. eo citius convergentem quo major est x. Index ipsius x in primo termino seriei necessario erit unitas, quoniam ultima tagens *DH* datam ad Abscissam *AB* supponitur habere inclinationem. Erit $\dot{y} = A\dot{x} + \overline{1-n} \times Bx^{-n}\dot{x} + \overline{1-2n} \times Cx^{-2n}\dot{x} +$ &c. Unde est $\dot{x} : \dot{y} :: 1 : A + \overline{1-n} \times Bx^{-n} + \overline{1-2n} \times Cx^{-2n}$ + &c. vel ob similia triangula *DEH*, *HGK* $1 : A + \overline{1-n} \times Bx^{-1} + \overline{1-2n} \times Cx^{-2n} +$ &c. $:: DE : y$; ideoque invenietur $DE = x + \frac{nB}{A}x^{1-n} +$ &c. ponendo pro y ejus valorem in serie. Et $AD = AE - DE = -\frac{nB}{A}x^{1-n} +$ &c. Sit jam x infinite magna, & erit accurate $y = EH = Ax$, $AD = -\frac{nB}{A}x^{1-n}$, quumque per naturam seriei sit n numerus affirmativus, erit *AD* infinite minor *EH*, & etiam infinite minor *DH* quæ ad *EH* datam habet rationem: hoc est z infinite minor v, igitur in æquatione v non erit tot dimensionum quot est z, adeoque nec tot quot est cnrva. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1. Igitur æquatio $x = a$ deſignat rectam, ubi ordinata y nullius eſt dimenſionis, $\overline{x+a}\times y = bx^2 + cx + d$ omnes ſecundi ordinis quæ pergunt in infinitum, $\overline{x+a}\times yy = \overline{bx^2+cx+d}\times y + ex^3 + fx^2 + gx + h$ omnes tertii ordinis: & ſic in reliquis.

Coroll. 2. Si exiſtente Abſciſsâ curvæ infinite magnâ, Ordinata ſit aduc infinite major, ea parallela erit Tangenti Cruris Parabolici ad diſtantiam infinitam.

Coroll. 3. Sin Ordinata ſit infinite magna, quum Abſciſſa non eſt infinite magna, ea parallela erit Aſymptoto cruris Hyperbolici.

Coroll. 4. Conſtat methodus determinandi poſitionem Tangentium curvarum ad diſtantiam infinitam, id eſt poſitionem Ordinatarum quæ in æquatione non aſcendent ad tot dimenſiones quot eſt curva, ſcilicet ex ratione quam ad invicem habent x, y in ultimâ earum magnitudine: quæ ratio ſemper invenitur ope ſerierum convergentium.

Scholion.

POteram hanc Propoſitionem eodem modo demonſtraſſe quo priorem. Nam in æquatione tot ſemper peribunt Ordinatæ dimenſiones, quot interſectionis ejus puncta abeunt in infinitum. Et ſi quando in aliquâ curvâ Ordinata non eſt tot dimenſionum quot eſt curva, ſemper comcipiendum eſt puncta quædam interſectionis abire in infinitum: imo hoc in ip-

ſis

ſis Ovalibus obtinet; nam concipiendum eſt eas habere puncta duplicia imaginaria ad diſtantiam infinitam. Finge enim curvam habere tot Aſymptotos quot habet dimenſiones, quarum nullæ duæ ſunt inter ſe parallelæ: atque Ordinatæ illis æquidiſtantes tot erunt dimenſionum quot eſt Curva, demptâ unitate. Concipe Aſymptotos plures motu angulari latas, donec tandem evadant parallelæ, & ordinatæ omnibus illis parallelæ perdent tot dimenſiones quot ſunt Aſymptoti æquidiſtantes. Quod ſi forte æquatio Aſymptotos duas vel plures determinans evadat impoſſibilis, evaneſcent Aſymptoti illæ cum earum cruribus; at Ordinatæ non erunt plurium dimenſionum quam antea erant: Atque hinc redditur ratio, quomodo in Ovalibus aliiſque curvis, Ordinatarum nulli tangenti ultimæ parallelarum evaneſcunt dimenſiones: ſequitur vero in illis caſibus dimenſionum evaneſcentium numerum ſemper eſſe parem, quoniam radicum impoſſibilium numerus eſt par. Si forte evenit, quod Ordinatæ unicæ Aſymptoto parallelæ perdunt plures dimenſiones, & nulla interim comparet æquatio, per cujus radicum impoſſibilitatem Aſymptoti reliquæ evanuerunt; tum concipe plures Aſymptotos in unam coire. In illis caſibus Aſymtotos ſemper habet crura plura ſolito ad eaſdem plagas extenſa. Numerus vero Aſymptoton coeuntium quas curva quævis habere poteſt, æqualis eſt numero Aſymptoton parallelarum quas habere poteſt; priuſquam enim coëunt evadunt parallelæ.

PROP.

PROP. VI. PROBL.

Invenire Asymptotos Curvarum.

EX datâ æquatione ad curvam reducatur Ordinata y in feriem hujufmodi $y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} +$ &c. eo citius covergentem quo major eft Abfciffa x: fume Ordinatam novam z æqualem terminis omnibus hujus feriei initialibus, qui augendo x non minuuntur: & Ordinatarum y, z differentia augendo x continue diminuetur, atque Ordinatæ ipfæ ad æqualitatem magis magifque tendent: Unde Linearum Abfciffam communem x & Ordinatas y, z habentium Crura tanto propius ad fe invicem continue accedunt, quanto magis producuntur, & tandem coincident: atque adeo z eft Ordinata Afymptoti, quæ dabitur ex æquatione eam definiente. Q. E. I.

Coroll. 1. Igitur infinita funt crurum genera, quo fimplicior eft ordinata z, eo fimplicius erit crus: quod fi fit z ordinata rectæ, crus erit Hyperbolicum.

Coroll. 2. Si primus terminus feriei, qui augendo x minuitur, fit affirmativus, Afymptotos jacet inter curvam & Abfciffam; fin minus curva jacet inter Afymptoton & Abfciffam. Nam terminus ille feriei evadit æqualis parti Ordinatæ inter crus & ejus Afymptoton interceptæ, ubi eft x infinite magna.

Coroll.

Coroll. 3. Ordinatæ Ovalium reduci nequeunt in ſeries ad veritatem tanto magis accedentes quanto major eſt x. Nam ſi hoc fieri poſſit, Ordinata Ovalis eſſet quantitas realis cum Abſciſſa eſt infinite magna. Sed Ordinata Ovalis eſt imaginaria cum Abſciſſa eſt infinite magna. Unde liquet Methodus dignoſcendi Ovales.

Coroll. 4. Simili prorſus ratiocinio colligitur, quod ſi quando Ordinata curvæ evadere poſſit infinite magna, non item Abſciſſa; valor Ordinatæ habere nequit in ſerie eo citius convergente quo major eſt Abſciſſa.

Coroll. 5. Omnis Linea imparis cujuſque Ordinis pergit in infinitum. Etenim Linea ordinis imparis deſignatur æquatione imparium dimenſionum; adeoque ad minimum reperietur una ſeries eo citius convergens quo major eſt x, propterea quod æquatio imparium dimenſionum ad minimum unam habet radicem poſſibilem. Et ſeries iſtiuſmodi (per *Coroll.* 3.) ad Ovales non extenditur, ergo ad curvas quæ progrediuntur in infinitum.

Coroll. 6. Hinc etiam ſequitur, quod Ovalium tum Abſciſſæ tum Ordinatæ ſemper ſunt parium dimenſionum. Nam ſi eſſet alterutra imparium, curva (per *Coroll.* 5.) pergeret in infinitum.

Coroll. 7. Linea quævis tot habere poteſt Aſymptotos quot ipſa eſt dimenſionum & nunquam plures. Nam tot habere poteſt, quot habet radices æquatio quæ dat primum terminum ſeriei $Ax + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} +$ &c. id eſt quot curva

 eſt

eſt dimenſionum, ut conſtat ex ſerierum doctrinâ.

Coroll. 8. Si terminorum initialium plures valores coincidant, Aſymptoti plures in unam coibunt: & figura habebit crura plura ſolito ad eaſdem plagas extenſa: ut accidit Conchoidi Veterum, quæ habet quatuor crura ad unicam Aſymptoton jacentia.

Coroll 9. Si numerus dimenſionum curvæ ſit par, & numerus Aſymptoton impar; vel ſi numerus dimenſionum ſit impar & numerus Aſymptoton par, figura habebit duo crura ad unicam Aſymptoton jacentia quæ in plagas eaſdem in infinitum ſerpunt.

Exempla.

1. SEries $x - \frac{1}{3}a + \frac{aa}{3x}$ &c. quam (in *Exemplo* 1. *Prop.* 2.) invenimus pro radice æqutionis $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere Aſymptoton æquatione $z = x - \frac{1}{3}a$ deſignatam, adeoque ejus crura eſſe Hyperbolica. Et quia $\frac{aa}{3x}$, terminus primus ſeriei qui augendo x minuitur, eſt affirmativus, Aſymptotos jacet (per *Coroll.* 2. *Prop.* 6.) inter Curvam & Abſciſſam. Et quoniam unica tantum ſeries iſtiuſmodi obtineri poteſt, Figura non habet niſi duo crura ad unicam Aſymptoton rectam jacentia.

2. Se-

2. Series illa $\frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} - \frac{a^4}{6x^3} -$ &c. quam (in *Ex.* 2. *Prop.* 2.) invenimus pro radice æquationis $yx^3 + ayxx + a^2xx - 2a^3x = 0$ indicat Abſciſſam eſſe Aſymptoton habentem duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas oppoſitas extenſa.

3. Series $x - \frac{1}{3}a + \frac{a^3}{81x^2}$ &c. quæ eſt radix æquationis $y^3 + axy - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere duo crura ad eaſdem ejuſdem Aſymptoti rectæ partes jacentia & in plagas oppoſitas protenſa.

4. Series illæ duæ $x + \frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4x}$ &c. & $2x + a - \frac{2a^2}{7x}$ &c. quæ (in *Ex.* 4. *Prop.* 2.) prodiere pro radicibus æquationis $\dot{x}^2y^2 - 3\dot{x}^2\dot{x}y + 2x^2\dot{x}^2 - axy^2 + a^2x^2 = 0$ indicant illam æquationem deſignare curvam habentem duas Aſymptotos rectas, quarum quælibet habet duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas oppoſitas protenſa.

5. Series duæ $x + \frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2}$ &c. $x - \frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2}$ &c. indicant duas Aſymptotos in unam coiſſe; & illam habere duo crura ad diverſas ejus partes jacentia & in plagas eaſdem infinite progredientia. Adeoque Ordinatæ Aſymptoti illi parallelæ (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) erunt unius tantum dimenſionis. Habet vero curva aliam Aſymptoton quæ ex alia ſerie dabitur.

Scholion.

Methodus inveniendi Asymptotos in hâc Propositione exposita est maxime generalis; sunt & aliæ methodi quamplures particulares inveniendi Asymptotos rectas, quas tamen omnes comprehendit ea jam tradita: Considerari potest Asymptotos recta ut tangens ad punctum curvæ infinite distans, & hoc modo reducitur Asymptotôn doctrina ad doctrinam tangentium, vel considerari possunt Asymptoti tanquam extremæ crurum partes indirectum productæ. Sed omnes hæ methodi præsupponunt, aliquo saltem modo, serierum doctrinam.

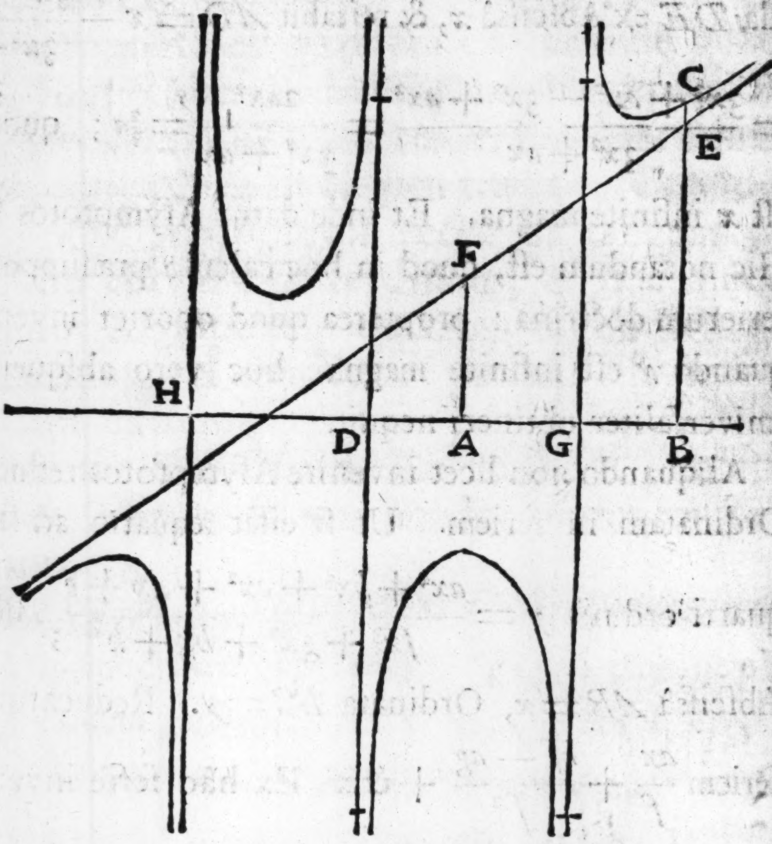
Vide Fig. Prop. 5. Invenienda sit Asymptotos curvæ *ALH*, quam desinat æquatio $y^3 - axy - x^3 = 0$, ubi x & y easdem designant rectas quas in dictâ Propositione designabant. Capiatur æquationis Fluxio, & erit $3y^2\dot{y} - ax\dot{y} = 3x^2\dot{x} + ay\dot{x}$, unde $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 + ax : 3x^2 + ay$, hoc est, *HG* ad *GK* vel *DE* : *EH* :: $3y^2 - ax : 3x^2 + ay$, pro y substitue x ejus valorem, quum est x infinite magna, & erit *DE* : *EH* :: $3x^2 - ax : 3x^2 + ax$, & sumendo rationem ultimam *DE* : *EH* :: $3x^2 : 3x^2$, id est, in ratione æqualitatis. Datur igitur Asymptotos *DH* positione. Restat jam ut inveniatur in Abscissâ punctum *D* per quod transit Asymptotos. Quoniam mox ostensum est esse *DH* : *EH* vel *DE* : $y :: 3y^2 - ax : 3x^2 + ay$, erit $DE = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 + axy}$ =

$=\frac{3x^3-ax^2}{3x^2+ax}$ ob y æqualem x. Subducatur jam recta illa *DE* ex Abſciſsâ x, & reſtabit $AD=x-\frac{3x^3-ax^2}{3x^2+ax}$ $=\frac{3x^3+ax^2-3x^3+ax^2}{3x^2+ax}=\frac{2ax^2}{3x^2+ax}=\frac{2}{3}a$; quoniam eſt x infinite magna. Et inde datur Aſymptotos *DH*. Hic notandum eſt, quod in hoc calculo præſupponitur ſerierum doctrina: propterea quod oportet invenire y quando x eſt infinite magna: hoc vero abſque ſerie univerſaliter obtineri nequit.

Aliquando non licet invenire Aſymptotos reducendo Ordinatam in ſeriem. Ut ſi eſſet æquatio ad lineam quarti ordinis $y=\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{fx^3+gx^2+hx+k}$; ubi eſt Abſciſsâ $AB=x$, Ordinata $BC=y$. Reducatur y in ſeriem $\frac{ax}{f}+\frac{bf-ag}{f^2}+$ &c. Ex hâc ſerie invenietur unica tantum Aſymptotos *FE*; reliquæ enim Aſymptoti, Ordinatæ parallelæ ex illâ non prodeunt: prodibunt tamen reducendo valorem Abſciſſæ in ſeriem ex dignitatibus Ordinatæ deſcendentibus confectam; ſed facilius hoc modo. Patet enim Ordinatam evadere infinite magnam, adeoque curvæ Aſymptoton, quotieſcunque quantitas fx^3+gx^2+hx+k evadit nihil: & hoc ter accidere poteſt, propter Æquationis Cubicæ $fx^3+gx^2+hx+k=0$ tres radices. Nam ſi Æquationis illius radices omnes ſint reales & inæquales, eæ

ſunto

ſunto *AG*, *AD*, *AH* & tres Ordinatæ per puncta *G*, *D*, *H* tranſeuntes erunt totidem Aſymptoti. Quare



in illo caſu curva habet omnino quatuor Aſymptotos & octo crura adjacentia; uti in Schemate videre eſt. At ſi Æquationis illius duæ radices æquales ſint, duæ Aſymptoti coibunt; atque evaneſcunt crura quæ prius inter eas contenta erunt. Et curva habebit duas tantum Aſymptotos cum ſex cruribus. Si æquationis ſupradictæ radices omnes ſint æquales, aut earum duæ imaginariæ, vel coibunt tres Aſymptoti vel duæ evaneſcent, at in utroque caſu figura habebit duas Aſymptotos

ptotos sese secantes; in quarum angulis oppositis jacent Hyperbolæ oppositæ adinstar Hyperbolæ Conicæ.

In Asymptotôn rectarum inventione, non semper necesse habemus ad series recurrere. Nam assumi potest æquatio universalis designans omnes curvas generis alicujus, & inde serierum ope construi potest Canon generalis qui sufficiat ad inventionem Asymptotôn Linearum omnium illius ordinis. Ut si esset æquatio $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ ad Conisectiones, ubi est x Abscissa, y Ordinata; Suppono y æqualem huic seriei $ax + b + cx^{-1} +$ &c. Et determinando Coefficientes, uti jam ostensum est, invenietur esse a radix æquationis $Aa^2 + Ba + C = 0$, unde dabitur a; eritque $b = -\dfrac{Da + E}{2aA + B}$, $c = -\dfrac{Ab^2 + Db + F}{2aA + B}$.

Si æquatio sit $Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = 0$ ad Lineas tertii ordinis, erit a radix æquationis: $Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0$,

$b = -\dfrac{Aa^2 + Ba + C}{3Ea^2 + 2Fa + C}$ atque erit erit $c =$

$\dfrac{-3Aab^2 + Bb^2 + Eab + Fb + Ha + K}{3Aa^2 + 2Ba + C}$. Quibus expressionibus semel inventis, invenire licet Asymptotos rectas harum curvarum absque recursione ad series. Et notandum est quod a semper dat inclinationem Asymptoti ad Abscissam, b dat distantiam inter principium Abscissæ & punctum in quo Asymptotos eandem secat, c denique ostendit ad quas Asymptoton partes jacent

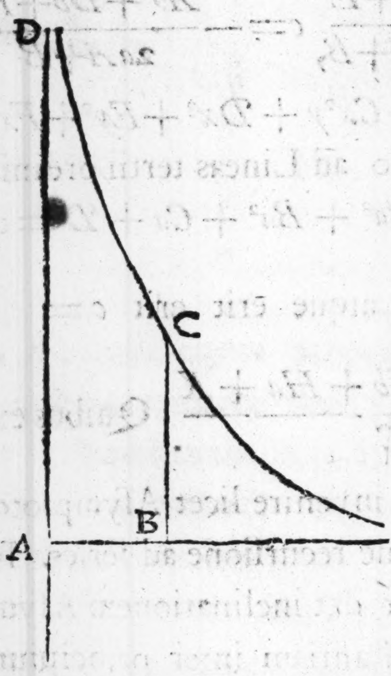
earum

earum crura. Hæc omnia ex Propositione & ejus Corollariis admodum manifesta sunt.

PROP. VII. PROBL.

Invenire Numerum & Plagam crurum Asymptoton aliquam adjacentium.

CAS. 1. Sit primo curva, cujus Asymptotos recta AD per initium Abscissæ transiens, Abscissa $AB = x$, & ipsi AD parallela sit Ordinata $BC = y$. Reducatur y in seriem $\frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n-r}} + \frac{C}{x^{n-2r}} +$ &c. eo citius convergentem quo minor est x. Et n index ipsius x semper erit affirmativus, propterea quod quum est x infinite parva, Ordinata y coincidit cum Asymptoto, & per consequens est infinite magna. Jam sit x infinite parva, & evadet $y = \frac{A}{x^n}$ accurate, qui valor est infinite magnus & affirmativus; quare curva habet crus unum ad



easdem Asymptoti AD partes jacens cum Ordinata BC, & in easdem cum Ordinatâ partes ex-

extensum. Mutari jam concipe signum ipsius *x*, & eam etiamnum manere infinite parvam; atque si *n* sit numerus integer vel fractus cum Denominatore impare, figura habebit aliud crus ad alias Asymptoti partes jacens, & in easdem cum priori plagas extensum, si *n* est numerus par, at in oppositas si sit *n* impar vel fractus cum Denominatore impare. Si vero sit *n* fractio cum Denominatore pare, signum ipsius *x* mutari nequit, at Asymptotos habebit duo crura ad easdem ejus partes jacentia & in plagas oppositas serpentia.

Cas. 2. Si Asymptotos sit curva, numerus crurum dignoscitur ex numero valorum Ordinatæ coeuntium, cum abscissa est infinite magna.

Si alii sint serierum casus alii itidem erunt crurum casus, at eorum plagæ & numerus semper innotescent. Q. E. I.

Coroll. 1. Si *n* sit numerus integer & par Asymptotos habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia & in plagas easdem progredientia.

Coroll. 2. Si *n* sit integer & impar, vel fractus cum impare Denominatore, Asymptotos habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia & in plagas oppositas protensa.

Coroll. 3. Si *n* sit fractus cum Denominatore pare Asymptotos habet duo crura ad easdem ejus partes jacentia & in plagas oppositas serpentia.

Coroll. 4. Hinc etiam comparantur longitudines Asymptotôn inter se. Unde constabit quasdam ad se invicem datam habere rationem,

alias vero esse aliis infinite majores vel minores.

Coroll. 5. Quamvis omnia crura cum Asymptotis suis tandem coincidere censenda sunt: tamen indistantiis æqualibus utcunque magnis aliqua crura ad Asymptotos suas aliis infinities propinquiora accedunt.

PROP. VIII. THEOR.

ÆQuatio $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 +$ &c. designat figuram habentem duo tantum crura infinita ad easdem vel oppositas plagas progredientia prout index dignitatis x in termino altissimo est numerus par vel impar.

Sensus Propositionis est, quod æquationes $y = a + bx$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$, &c. ubi indices terminorum altissimorum sunt numeri impares, designant figuras habentes duo tantum crura infinita ad oppositas plagas protensa; & quod æquationes $y = a + bx + cx^2$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, &c. ubi terminorum altissimorum indices sunt numeri pares, designant Figuras habentes duo tantum crura infinita ad eandem plagam pergentia.

Propositio vero sic demonstratur.

Concipe Abscissam x perpetuo augeri, & simul augebitur Ordinata y; sit x tandem infinite magna, & erit etiam y infinite magna; adeoque

que figura habet crus infinitum. Cum vero Ordinata y eſt infinite magna, pendet ejus ſignum, hoc eſt, plaga cruris infiniti, ex ſigno termini altiſſimi, quoniam in illo caſu is eſt reliquis infinite major. Evadat jam x negativa, id eſt ſumatur Abſciſſa ad alteras partes, & ad illas partes infinitum augeatur; atque etiam augebitur y inin finitum; unde curva habet crus aliud infinitum. Si index termini altiſſimi ſit par, ejus ſignum in utroque caſu idem eſt, ſin impar in uno caſu erit affirmativus, in altero negativus. Cum igitur plaga crurum pendet ex ſigno termini altiſſimi, in primo caſu pergent crura ad plagas eaſdem, in ſecundo ad oppoſitas. Q. E. D.

Pendet itaque tota hujus demonſtationis vis ex termino altiſſimo; adeoque nihil refert quomodo ſeſe habeant termini intermedii. Eodem res redit,utrum affirmentur vel negentur; utrum ſint in æquatione vel non; nam demonſtratio ab illis minime turbabitur.

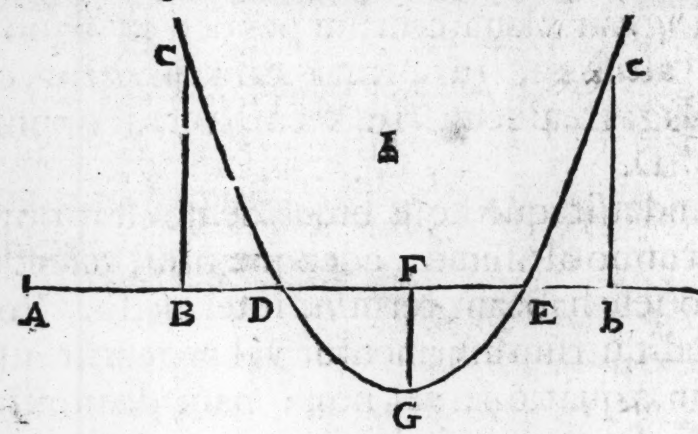
Scholion.

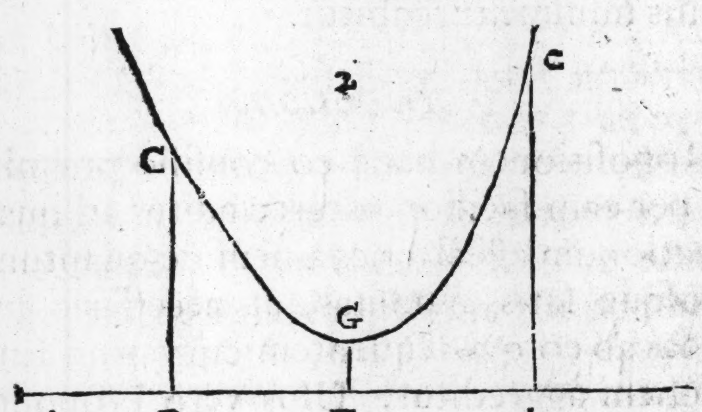
PRopoſitionem hanc eo conſilio præmiſi, ut per eam facilior pateret aditus ad quaſdam æquationum affectiones à nemine quantum ſcio hucuſque ſatis expoſitas, at neceſſario intelligendas ab eo qui ſequentem curvarum Enumerationem aggreditur. Uſus vero Propoſitionis Exemplis ſequentibus ſtatim apparebit in dignoſcendis realibus & imaginariis radicibus æquationum, idque vel calculo, vel deſcribendo cur-

vam; ſed & deſcribendo curvas conſtruuntur æquationes; ſatis quidem expedite, modo quis hâc methodo procedere aſſuetus ſit. Nam ſi æquatio ſit Cubica, ſufficicit invenire quinque vel ſex curvæ puncta; ſi Biquadratica, ſufficit invenire octo vel decem.

Exemplum Primum.

SIT $y=xx+Ax+B$ æquatio deſignans curvam habentem duo crura ad eaſdem plagas protenſa, cujus Abſciſſa $AB=x$, Ordinata





$BC=y$. AB vel ſecat curvam in duobus punctis (*D*, *E Fig.* 1.) vel in nullis (*Fig.* 2.) Sit jam

jam $y = 0$, vel $xx + Ax + B = 0$, & æquationis illius radices erunt AD & AE in *Figura* 1ma, at in *Figura* 2da ſunt imaginariæ. Vides igitur quod, in caſu primo, exiſtente Abſciſsâ minore minimâ radice AD vel majore maximâ AE, Ordinata correſpodens erit affirmativa: atque Ordinata inter puncta D & E erecta eſt negativa. Hæc autem omnia vera ſunt ex hypotheſi quod terminus altiſſimus xx ſit affirmativus. Igitur D, E ſunt limites in quibus Ordinata y nec affirmatur neque negatur ſed nulla eſt, hoc eſt in quibus quantitas $xx + Ax + B$ nec affirmatur neque negatur, ſed nihil eſt. Et Ordinatæ punctis D, E proxime & ad diverſas eorum partes jacentes, ſigna contraria ſemper habebunt. In caſu ſecundo quando Abſciſſa minime ſecat curvam, Ordinatæ omnes ejuſdem ſunt ſigni tendentes ad plagam crurum.

Supponamus jam eſſe aliam curvam eandem Abſciſſam AB habentem: Ordinatam vero quæ realis ſit quum Ordinata y eſt affirmativa, quæque imaginaria ſit quum y eſt negativa. Et in caſu primo quando æquationis $x^2 + Ax + B = 0$ radices ſunt reales (*Fig.* 1.) Ordinatæ novæ curvæ per puncta D & E tranſeuntes ſemper tangent curvam & puncta contactus erunt limites per quos Ordinatæ motu parallelo latæ tranſeunt ipſo temporis momento, quo evadunt poſſibiles ex impoſſibilibus, aut è contra. Atque Ordinatæ inter puncta D, E erectæ reales aut imaginariæ erunt prout negatur aut affirmatur terminus xx. Ordinatæ ad alia quævis Abſciſſæ puncta erectæ rea-

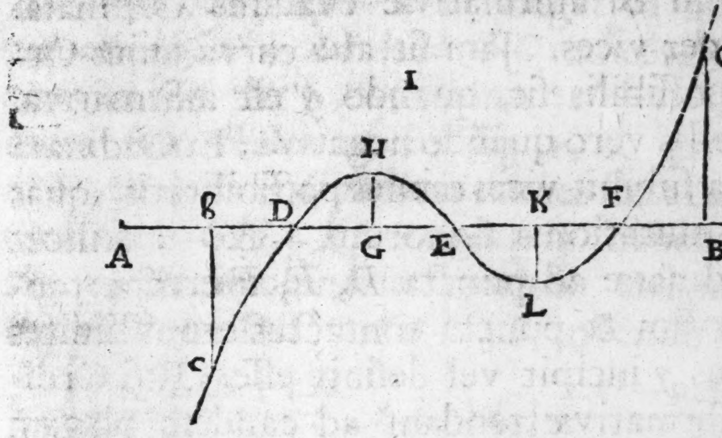
reales aut imaginariæ erunt prout affirmatur aut negatur terminus ille xx.

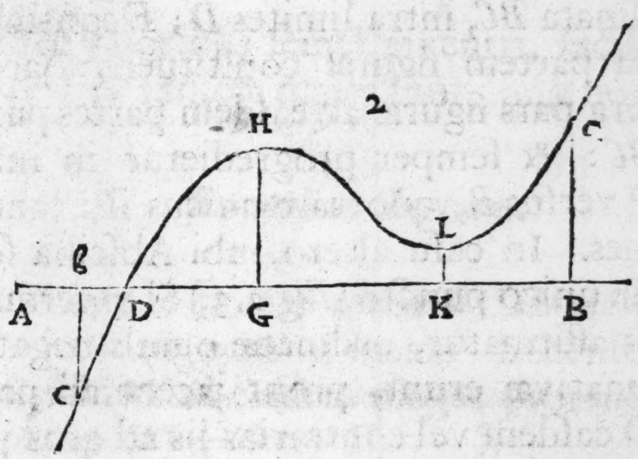
In caſu ſecundo ubi Abſciſſa non ſecat curvam, Ordinatæ omnes hujus novæ curvæ reales quidem erunt quando affirmatur xx, ſed omnes prorſus imaginariæ quando negatur idem terminus.

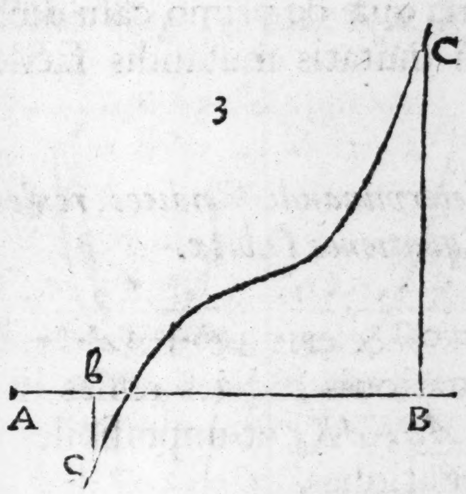
Sit FG ordinata maxima (*Fig.* 1.) inter puncta D, E erecta, at in Fig. 2. omnium minima, & in illo caſu erit $\dot{y}=0$, vel $2x\dot{x}+A\dot{x}=0$, nude $x=-\frac{1}{2}A=AF$: quem valorem in æquatione pro x ſubſtitue, & invenies $y=B-\frac{1}{4}AA=FG$. Et patet quod Abſciſſa ſecat vel non ſecat curvam prout Ordinata illa FG tendit ad contrarias vel eaſdem plagas cum cruribus; hoc eſt, æquationis $xx+Ax+B=0$ radices ſunt poſſibiles quando affirmatur quantitas $\frac{1}{4}AA-B$, & impoſſibiles quando negatur eadem.

Exemplum Secundum.

SIT æquatio $y=x^3+Ax^2+Bx+C$ deſignans curvam habentem duo crura in plagas oppoſitas protenſa, cujus Abſciſſa $AB=x$, Ordinata $BC=y$. AB vel ſecat curvam in tribus punctis (*Fig.* 1.) vel in unico (*Fig.* 2, 3.) Sit ($y=$) $x^3+Ax^2+Bx+C=0$, & hujus æquationis radices erunt AD, AE & AF. Igitur ſi radices omnes ſint reales ut in Fig. 1. exiſtente Abſciſâ minore radice mediâ AE & majore minimâ AD, vel majore maximâ AF, ordinatæ valor reſpectivus erit affirmativus; & ordinatæ ad alia quæ-


I
C
H
β
D
K
F
A
G
E
B
L
C


2
H
C
L
β
A
D
G
K
B
C


C
3
β
A
B
C

quævis puncta erecta erunt negativæ. Negativæ enim & affirmativæ evadunt Ordinatæ ſemper per vices. Jam ſit alia curva cujus Ordinata poſſibilis ſit, quando y eſt affirmativa, impoſſibilis vero quando negativa; Et Ordinata illa nova ſubibit vices omnes poſſibilitatis, quas ſubit y mutationis ſignorum $+$ & $-$: ſcilicet tres Ordinatæ ad puncta D, E, F erectæ tangent curvam & puncta contactus erunt limites in quibus y incipit vel deſinit eſſe. Etſi Ordinatæ affirmativæ tendant ad eandem plagam cum Ordinata BC, intra limites D; E continebitur curva partem figuræ conſtituens: jacebit vero altera pars figuræ ad eaſdem partes puncti F cum BC: & ſemper progredietur in infinitum ab F verſus B, quoniam unicus illi tantum adeſt limes. In caſu altero, ubi Abſciſſa ſecat curvam in unico puncto (*Fig.* 2. 3.) Si x^3 terminus altiſſimus affirmatur, ordinatæ omnis negativæ aut affirmativæ erunt, prout jacent ad partes puncti D eaſdem vel contrarias iis ad quas jacet A. Et omnia quæ de primo caſu dicta ſunt, ad hunc caſum mutatis mutandis facile accomodantur.

Methodus determinandi Radices reales & imaginarias Æquationes Cubicæ.

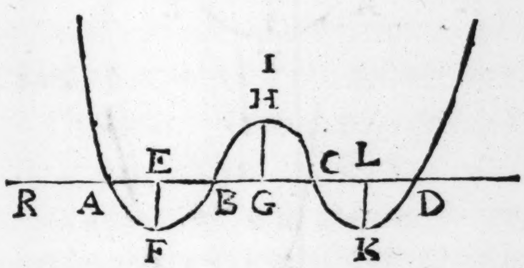
POne $y=0$, & erit $3x^2+2Ax+B=0$; cujus æquationis radices reales in *Fig.* 1ma & 2da, ſcilicet AG, AK, at impoſſibiles in *Fig.* 3^{tia}. Igitur ſi æquationes $3x^2+2Ax+B=0$ radices

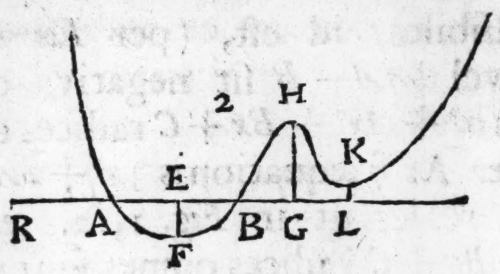
ſint

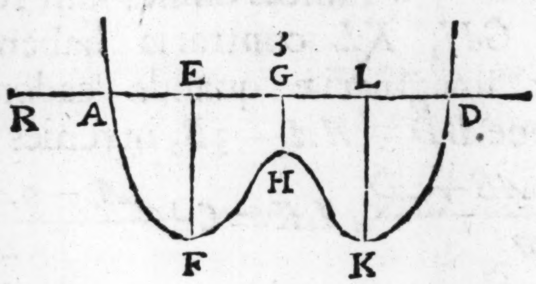
ſint impoſſibiles, id eſt, (per *Exemp.* 1.) Si $\frac{1}{9}AA - \frac{1}{3}B$ vel $\frac{1}{3}AA - B$ ſit negativa quantitas, æquationis $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ radices duæ erunt imaginariæ. At ſi æquationis $3x^2 + 2Ax + B$ radices ſint reales ut in *Fig.* 1, 2. æquationis $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ radices omnes ſunt reales ubi Ordinatæ GH, KL contraria habent ſigna, *Fig.* 1. & imaginariæ quando eadem habet *Fig.* 2. Pone $DD = AA - 3B$, invenies $GH = C$ $+ \frac{2A^3 - 9AB + 2D}{27}$, $LK = C + \frac{2A^3 - 9AB - 2D^3}{27}$. Et hiſce valoribus ſemel inventis, facile eſt invenire quæ radices reales ſunt, quæ non.

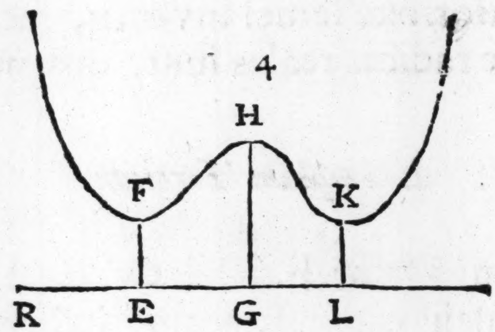
Exemplum Tertium.

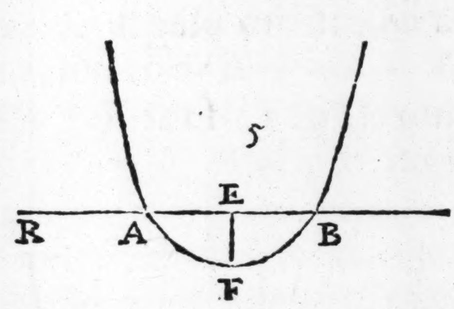
SIT jam $y = x^4 + Bx^3 + Cx^2 \, Dx + E$ æquatio deſignans Lineam habentem duo crura infinita ad eaſdem plagas protenſa. Pone $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$; hujus æquationis radices quatuor (*Fig.* 1.) ſunt RA, RB, RC, RD,

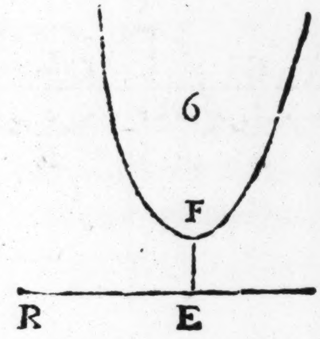



2
H
K
E
R A B G L
F


3
E G L
R A D
H
F K


4
H
F K
R E G L


5
E
R A B
F


6
F
R E

at in *Fig.* 2, 3, 5, duæ radices impoſſibiles, & in *Fig.* 4, 6. omnes ſunt impoſſibiles. Pone $y=0$, & erit $4x^3+3Bx^2+2Cx+D=0$, cujus æquationis tres radices (*Fig.* 1, 2, 3, 4.) ſunt *RE*, *RG*, *KL*: at in *Fig.* 5, 6. æquatio illa unicam tantum habet radicem *RE*. In primo caſu (*Fig.* 1) ſi Ordinatarum *EF*, *GH*, *LK*, duæ ſunt negativæ, & tertia affirmativa, æquatio $x^4+Bx^3+Cx^2+Dx\,E=0$ habet quatuor radices poſſibiles. Si ordinatarum duæ ſint affirmativæ & tertia negativa (*Fig.* 2.) vel ſi omnes tres ſint negativæ (*Fig.* 3.) æquatio non habet niſi duas radices reales: Si ordinatæ omnes ſint affirmativæ (*Fig.* 4.) radices omnes erunt impoſſibiles.

In ſecundo caſu quando æquationis $4x^3+3Bx^2+2Cx+D=0$ radix unica erat poſſibilis (*Fig.* 5, 6.) ſi ordinata *EF* ſit negativa (*Fig.* 5.) radices duæ erunt reales tantum: at ſi ordinata illa ſit affirmativa (*Fig.* 6.) omnes radices erunt imaginariæ. Hi ſunt Caſus Æquationis Biquadraticæ.

Unde inveniri poteſt Canon generalis pro dignoſcendis radicibus realibus & imaginariis æquationum Biquadraticarum, ut in *Exemplis primo* & *ſecundo* fecimus pro æquationibus Quadraticis & Cubicis. Hoc vero prolixum admodum requirit calculum. Sufficiat quod novimus quomodo tractanda eſt æquatio particularis, ubi calculus non erit adeo laborioſus. Eadem methodus ad omnes æquationes extenditur. Si ſit nova curva ordinatam habens realem quando

hujus est affirmativa & imaginariam quando hujus curvæ ordinata est negativa; vices omnes possibilitates & impssibilitatis facillime innotescunt per ea quam diximus in *Exemplis duobus primis*.

Ex hisce Exemplis satis apparet numerum radicum impossibilium semper esse parem. Item sequitur, quod si sit æquatio $x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \&c. = o.$ & sit $B^2 - C \times n^2 \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \overline{n-4} \times \&c.$ quantitas negativa, æquatio illa ad minimum habebit duas radices imaginarias. Continuanda vero est series $n^2 \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times \&c.$ donec n per continuam unitatis subductionem tandem exhauriatur. Et si desit terminus secundus Bx^{n-1}, & Cx^{n-2} huic proximus sit affirmativus, æquatio ad minimum habebit duas radices imaginarias.

Ex Propositionibus hactenus traditis invenire licet genus, positionem, plagam & numerum crurum infinitorum: & ex hâc Propositione ejusque Exemplis invenies quæ crura conjunguntur: adeoque invenies formam curvæ. Et faciendo rectam gyrare circa punctum aliquod idoneum & secare Parabolas quas in hâc Propositione descripsimus, habebuntur omnes casus alicujus æquationis radicum possibiles; hoc est, omnes formæ curvarum quas æquatio generalis designat: & inde enumerantur Linearum species, siquidem species curvarum non tam ab ipsarum intimâ naturâ, quam à forma pendere volumus.

Pro-

Propoſitiones quæ ſequuntur continent conſimiles aliquot curvarum Rationalium proprietates ab æquationum naturâ immediate fluentes.

PROP. IX. PROBL.

Invenire numerum punctorum quæ determinant Lineam alicujus ordinis.

LInea quævis deſcribi poteſt per tot puncta, quot ſunt Coefficientes in æquatione generaliſſimâ eam definiente & non plura; ut conſtat ex methodo D. *Neutoni* univerſali deſcribendi curvas per data totidem puncta quot eas determinant: cujus ſpecimen dedit in ſectionibus Conicis ad Algebræ ſuæ Problemata 54, 57. Et hactenus annotatum eſt, quod exiſtente n numero dimenſionum curvæ, erit $\frac{n^2+3n}{2}$ numerus Coefficientium in æquatione generaliſſimâ Lineas omnes alicujus ordinis definiente; & proinde etiam erit $\frac{n^2+3n}{2}$ numerus punctorum determinantium curvam cujus dimenſio eſt n.

Itaque recta determinatur ex duobus punctis, ſectio Coni ex quinque; Linea tertii Ordinis ex novem, Linea quarti ex quartuordecem. Et ſic porro.

Coroll. 1. Ex dato numero punctorum determinantium dabitur dimenſio curvæ. Sit enim

m pun-

m punctorum numerus, & erit $m = \frac{n^2 + 3n}{2}$.

Unde & viciſſim invenies $n = \frac{-3 + \sqrt{8m + 9}}{2}$.

Ut ſi eſſet $m = 20$, invenies $n = 5$.

Coroll. 2. Ex hâc Propoſitione invenies numerum punctorum quæ determinant Lineam aliquam particularem, ſi poſſibile ſit, ſunt enim quædam Lineæ quas nullus punctorum numerus determinat.

Exempla.

1. SIT $y = ax + b \pm \sqrt{cx + d}$ æquatio generaliſſima ad Parabolam Conicam: quum igitur quatuor tantum ſunt Coefficientes, Parabola determinatur ex quatuor punctis. Quatuor puncta non ſufficiunt ad determinandam Hyperbolam aut Ellipſin ſed quinque nimia ſunt.

2. Item ſectio Coni cujus datur Diameter, & angulus Ordinatarum, determinatur ex tribus punctis, Parabola ex duobus; duo non ſufficiunt ad determinandam Hyperbolam aut Ellipſin, ſed tria nimia ſunt.

3. Hyperbola Conica, datâ poſitione ejus Aſymptoto, determinatur ex quatuor punctis.

4. Parabola Conica, datâ poſitione ejus axe, determinatur ex tribus punctis.

5. Para-

5. Parabolæ quinque *divergentes*, datâ plagâ crurum, determinantur ex ſex punctis; Parabola *Carteſii* ex quinque; Parabola *Cubica* ex quatuor.

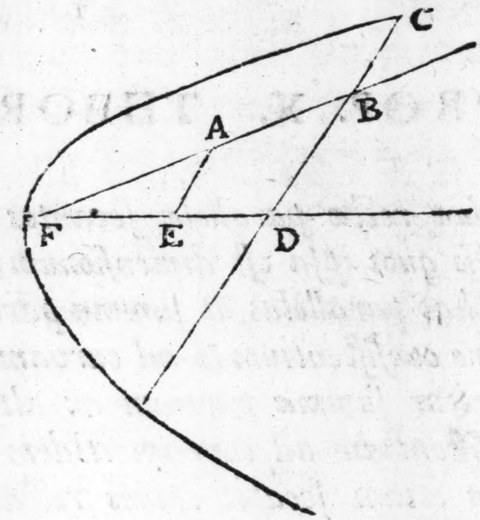
PROP. X. THEOR.

Ducantur duæ rectæ parallelæ ſecantes curvam in tot punctis quot ipſa eſt dimenſionum; recta quæ ita ſecat has parallelas ut ſumma partium ex uno ejus latere conſiſtentium & ad curvam terminatarum æquetur ſummæ partium ex altero ejus latere conſiſtentium ad curvam itidem terminatarum, ita etiam ſecabit omnes rectas hiſce parallelas.

SIT enim curvæ alicujus Abſciſſa $AB=x$, Ordinata $BC=y$, Æquationis relationem inter x & y definientis terminus ſecundus ſit $\overline{ax+b}\times y^{n-1}$: ſume in rectâ AB, $AF=\frac{-b}{a}$, & ordinatæ parallelam $AE=\frac{-b}{n}$; junge EF; ſi ea ſumatur pro Abſciſsâ, dico ſummam Ordinatarum ex unâ ejus parte æquari ſummæ Ordinatarum ex alterâ parte.

Nam ſit $y + \overline{ax+b}\times y^{n-1} + \&c. = 0$ æquatio exprimens relationem inte x, y. Producatur CB ſecans FE in D & ſit abſciſſa nova $ED=z$, Or-

Ordinata nova $DC = v$: ponatur $AB :: ED :: A : 1$, id est $x : z :: A : 1$, unde $x = Az$. $FA : AE$



$:: FB : BD$, vel $\frac{-b}{a} : \frac{-b}{n} :: Az + \frac{b}{a} : BD$ $= \frac{aAz + b}{n}$. $BC = DC - DB = v - \frac{aAz + b}{n} = y$, unde (per Theor. D. *Neutoni*) $y^n = v^n - \overline{aAz + b} \times v^{n-1}$ &c. $y^{n-1} = v^{n-1}$ &c. Hosce valores substitue in æquatione $y^n + \overline{ax + b} \times y^{n-1} + \&c. = 0$, & videbis v^{n-1} evanescere, id est æquationis terminum secundum deesse: igitur valores ipsius x erunt partim negativi & partim affirmativi, & summa affirmativorum æquabitur summæ negativorum: vel, quod perinde est, æquantur summæ Ordinatarum ex Abscissa ad curvam in easdem partes extensarum. Q. E. D.

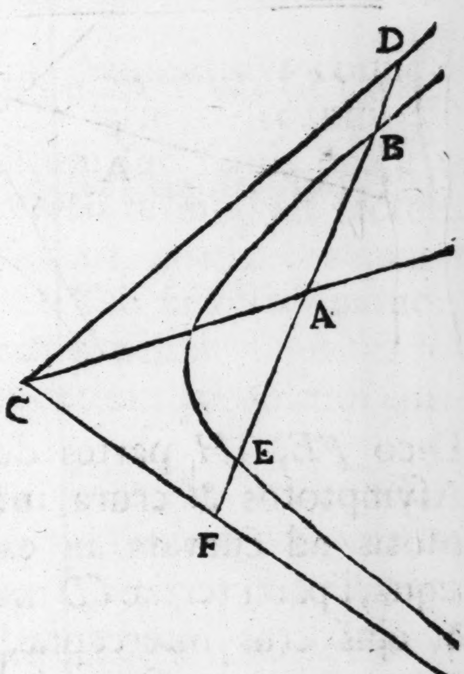
Re-

Recta quæ ita ſecat ordinatas appelletur Curvæ *Diameter*.

Coroll. 1. Duc rectas duas parallelas ſecantes Lineam ſecundi ordinis in duobus punctis, recta quæ has biſecat, biſecabit omnes illis parallelas. Adeoque æquatio $yy = ax^2 + bx + c$ deſignat omnes Lineas ſecundi ordinis.

Coroll. 2 Duc rectas duas quaſvis parallelas, ſecantes Lineam tertii ordinis in tribus punctis; recta quæ ita ſecat has parallelas, ut ſumma duarum partium ex uno ejus latere conſiſtentium, & ad curvam terminatarum, æquetur parti tertiæ ex altero ejus latere conſiſtenti, & ad curvam terminatæ, ita etiam ſecabit omnes rectas hiſce parallelas.

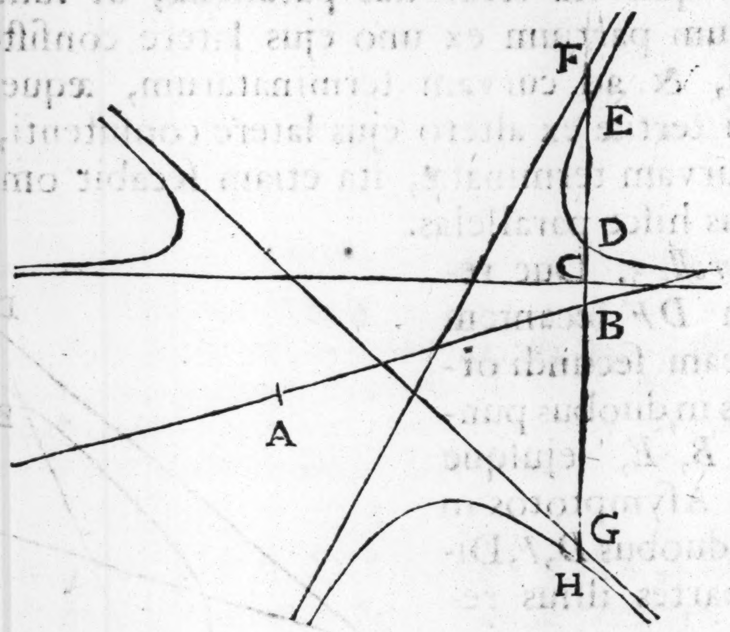
Coroll. 3. Duc rectam *DF* ſecantem Lineam ſecundi ordinis in duobus punctis *B*, *E*, ejuſque duas Aſymptotos in aliis duobus *D*, *F*, Dico partes illius rectæ interceptas inter Aſymptotos & earum crura ſibi invicem æquari. Duc Diametrum *CA* biſecantem *BE* omneſque rectas illi parallelas. Quia curva coincidit cum Aſymptotis ad diſtantiam infini-



K tam,

tam, coeunt in illo caſu puncta *B*, *D*; *E*, *F*: adeoque Diameter biſecat ordinatas in Aſymptotis terminatas in diſtantiâ infinitâ: unde per naturam rectæ in omni diſtantiâ eas biſecabit, hoc eſt, ubique *AD* = *AF*, ſed *AB* = *AE*, ergo *BD* = *EF*. Q. E. D.

Coroll. 4. Duc rectam *FH* ſecantem Lineam tertii ordinis in tribus punctis *E*, *D*, *H*; ut & tres ejus Aſymptotos in tribus aliis *F*, *C*, *G*;



Dico *FE*, *GH* partes duas hujus rectæ inter Aſymptotos & crura interceptas & ab Aſymptotis ad curvam in eaſdem plagas extenſas æquari parti tertiæ *CD* inter Aſymtoton tertiam & ejus crus interceptæ, & ab Aſymptoto ad curvam in oppoſitas plagas extenſæ. Ducatur enim Diameter *AB* quæ ita ſecat ordinatas, ut ſit

sit $BD + BE = BH$; quoniam in distantiâ infinitâ Asymptoti coincidunt cum suis cruribus, coeuntibus punctis F, E; C, D; G, H; Diameter AB ita etiam secabit ordinatas in Asymptotis terminatas in distantiâ infinitâ ut sit $BC + BF = BG$: at si hoc accidat in quâlibet distantiâ, accidet in omni, ergo est universaliter $BC + BF = BG$, sed $BD + BE = BH$; ergo demendo æqualia ab æqualibus, erit $BD - BC + BE - BF = BH - BG$, hoc est, $CD - EF = GH$, vel $CD = EF + GH$. Q. E. D.

Eâdem facilitate simile demonstratur de curvis superiorum ordinum.

Scholion.

HAnc Propositionem demonstravi considerando coefficientem termini secundi esse summam omnium radicum sub signis propriis collectam. Coefficiens tertii termini est factum sub singulis duabus radicibus, coefficiens quarti sub singulis tribus, quinti sub singulis quatuor, & sic in infinitum. Unde facillime sequitur series Theorematum sequentium ad libitum continuanda.

1. Ducantur quinque parallelæ secantes Lineam tertii vel superioris ordinis in tot punctis quot curva habet dimensiones: Sectio Conica vel linea recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa rectangulorum sub partibus earum inter curva sectionem Conicam vel rectam interceptis, & à curvâ ad sectionem Coni vel rectam in

in easdem plagas extensis, æquetur summæ rectangulorum sub partibus earundem parallelarum ad alteras sectionis Coni vel rectæ plagas à curvâ extensis, & in curva terminatis, ita secabit omnes rectas hisce parallelas.

2. Ducantur novem parallelæ secantes curvam quarti vel superioris ordinis in tot punctis quot curva est dimensionum. Ducatur Linea tertii vel inferioris ordinis secans has novem parallelas: & si componantur Parallepipeda sub singulis tribus partibus harum parallelarum inter curvam & Lineam tertii vel ordinis inferioris interceptis: atque in unaquâque novem parallelarum, si Parallelepipeda quæ prodeunt affirmata, æqualia deprehendantur iis quæ prodeunt negativa; idem accidet in omnibus rectis prioribus novem parallelis. Et sic porro.

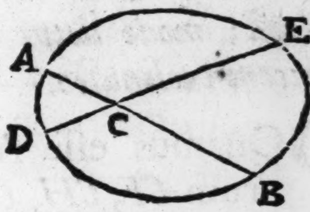
Hæ Lineæ quæ ita secant parallelas, tanquam curvarum Diametri (ut ita dicam) quodammodo considerari possunt.

PROP. XI. THEOR.

Sit AEBD *Linea secundi ordinis, quam secet recta* AB *in duobus punctis* A, B; *ut & recta* DE *in duobus aliis* D, E; *harum concursus sit* C. *Dico esse* AC × CB *ad* DC × CE *in ratione datâ; modo detur rectarum* AB, DE *inclinatio ad se invicem.*

SUpponamus enim Abscissam $AC = x$, & rectarum DC, CE quamlibet ambigue designare ordinatam y: atque curva hujusmodi æquatione

tione $y^2+\overline{ax+b}\times y+cx^2-dx=0$ deſignabitur, in quâ quantitas determinata non reperietur, quoniam principium Abſciſſæ eſt in curva. Ut inveniatur AB ſit $y=0$, & evaneſcent termini in quibus ea reperitur, atque erit $cx^2-dx=0$, unde in illo caſu eſt



$$x=\frac{d}{c}=AB, \text{ergo } AB$$

$$-AC=\frac{d}{c}-x=BC:$$

cujus ſignum mutetur quoniam puncta A, B jacent ad partes puncti C contrarias, & erit $BC=x-\frac{d}{c}$. Et inde $AC\times BC=xx-\frac{dx}{c}$. Conſtat vero per naturam æquationum, terminum ultimum in quo radix non reperitur, eſſe factum ſub omnibus radicibus; hoc eſt $DC\times CE =cx^2-dx$, & hoc rectangulum eſt ad $AC\times CB =xx-\frac{dx}{c}$ ut c ad unitatem: at ſervatâ rectarum AB, DE inclinatione ad invicem, non mutabitur quantitas c, ergo neque dicta ratio facti $AC\times CB$ ad $DC\times CE$. Q. E. D.

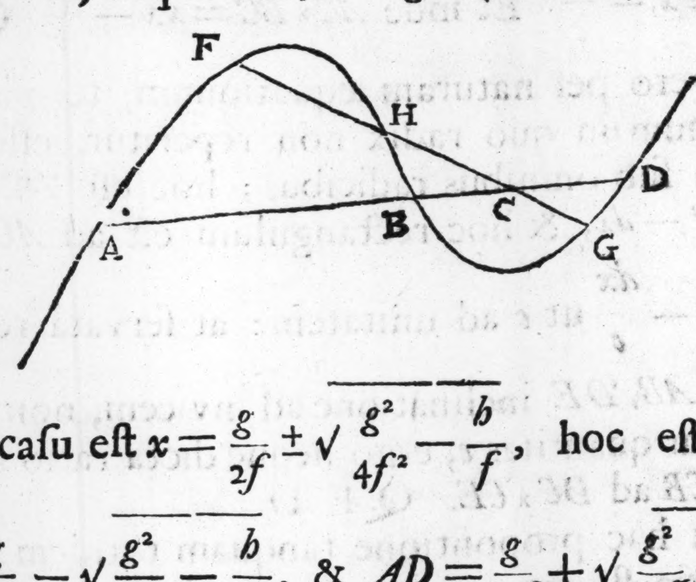
Ex hac propoſitione tanquam totidem Corollaria fluunt omnia, quæ tradere ſolent authores de ſectionum Conicarum Diametris, Verticibus, Lateribus rectis & tranverſis, & ratione contentorum ſub parallelarum ſegmentis.

PRO-

PROP. XII.

Sit AFG *Linea tertii ordinis, quam secet recta* AD *in tribus punctis* A, B, D, *ut &* FG *in tribus aliis* F, G, H : *harum concursus sit* C. *Dico esse* AC×BC×DC *ad* FC×GC×HC *in ratione datâ ; modo detur rectarum* AD, FG *ad se invicem inclinatio.*

POnamus esse Abscissam $AC = x$, & rectarum CF, CH, CG quamlibet ambigue designare ordinatam y : & curva hujusmodi æquatione designabitur $y^3 + \overline{ax+b} \times y^2 + \overline{cx^2+dx+e} \times y = fx^3 - gx^2 + hx$, ubi quantitas data non reperietur propterea quod initium Abscissæ est in curvâ. Sit $y = 0$, atque erit $fx^3 - gx^2 + hx = 0$, unde in



illo casu est $x = \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}}$, hoc est $AB = \frac{g}{2f} - \sqrt{\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}}$, & $AD = \frac{g}{2f} + \sqrt{\frac{g^2}{4ff} - \frac{h}{f}}$, ergo $BC = x - \frac{g}{2f} + \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}$, & $CD = x - \frac{g}{2f}$

$-\sqrt{}$

$-\sqrt{\frac{gg}{4ff}-\frac{h}{f}}$ cum ſigno mutato. Unde eſt $AC \times BC \times DC = x^3 - \frac{gx_2}{f} + \frac{hx}{f}$. Sed per naturam æquationum eſt $FC \times HC \times GC = fx^3 - gx^2 + hx$; ideoque ſolidum prius eſt ad poſterius ut unitas ad f: at ſervatâ inclinatione rectarum AD, FG, dabitur quantitas f, ergo etiam dicta ratio ſolidi $AC \times BC \times CD$ ad $FG \times GC \times HC$. Q. E. D.

Hinc tam facile conſequntur ea quæ tradidit D. *Neutonus* de Linearum tertii Ordinis Diametris, Verticibus, Lateribus rectis & tranſverſis, ratione contentarum ſub parallelarum ſegmentis, atque alia plurima; ut eadem plenius oſtendere neceſſarium haud duxerim.

Sufficiat hic obiter annotare, quod hâc methodo univerſali procedendo, ſcilicet argumentando à naturis æquationum, pateſcunt non ſolum ſectionum Coni proprietates, quas tanto labore adinvenerunt veteres, & tot ambagibus demonſtratas dederunt, idque methodo quæ ad alias curvas extendi nequit; ſed & proprietates curvarum omnium ordinum ſuperiorum.

Hiſce præmiſſis, pergerem ad Enumerationem Linearum tertii ordinis; ſed ob rei analogiam enumerare licet eas ſecundi. Hæ (per *Coroll.* 1. *Prop.* 10.) reducuntur omnes ad æquationem $yy = ax^2 + bx + c$; quæ æquatio, ut ſtatim apparebit, deſignat Hyperbolam, Ellipſin aut Parabolam, prout terminus axx affirmativus eſt, negativus, vel nullus.

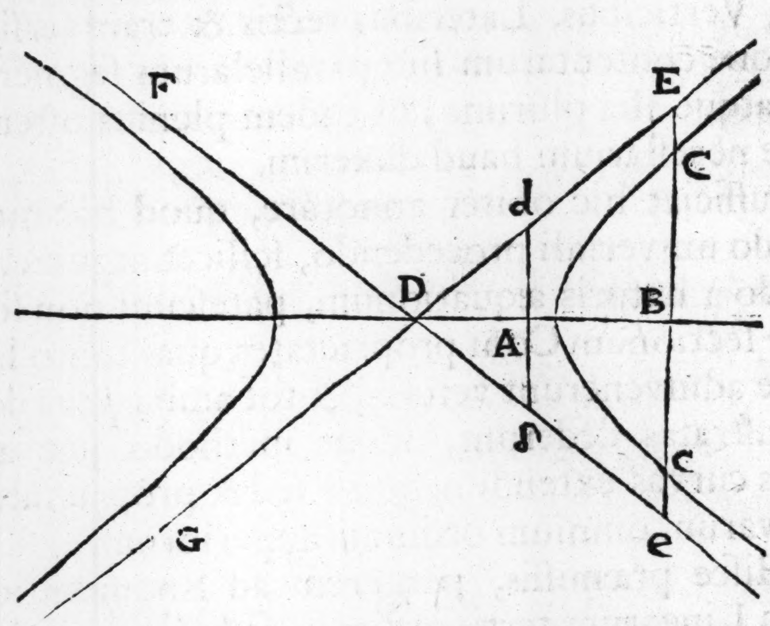
Enu-

Enumeratio Linearum ſecundi Ordinis.

PROP. XIII. THEOR.

Æquatio $yy = ax^2 + bx + c$ *deſignat figuram habentem quatuor crura infinita ad duas Aſymptotos rectas jacentia.*

Liquet fere hæc Propoſitio ex *Exemplo primo Scholii Prop.* 8. ſed argumento magis diſtincto ſic evincitur.



Augeatur x in infinitum, & duo valores ordinatæ y hinc inde æquales etiam augebuntur in infinitum; quare figura habet duo crura infinita. Mutetur ſignum ipſius x, hoc eſt ſumatur Abſciſſa ad alteras partes, & æquatio erit hæc $y^2 = ax^2 - bx + c$, ubi patet quod augendo x in

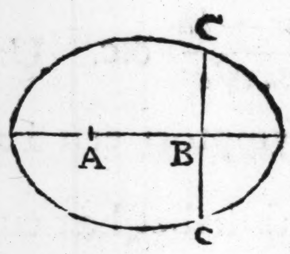
in infinitum, etiam augebitur y in infinitum: nam terminus affirmativus ax^2 erit omnibus reliquis multo major, modo x ſit admodum magna: quare curva habet alia duo crura, & omnino quatuor.

Reducatur y in ſeriem hujuſmodi convergentem $y = \pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{4ac - bb}{8ax\sqrt{a}}$ &c. Unde (per *Prop.* 6.) Ordinata Aſymptoti erit $\pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$. Igitur pro Aſymptotis habet hæc curva duas rectas ex Abſciſsâ hinc inde æqualiter jacentes. Nam ſume $AD = \frac{-b}{2a}$, in Abſciſsâ; per initium Abſciſſæ duc $dA\delta$ ordinatæ parallelam, in quâ ſint Ad, $A\delta$, æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, ad contrarias puncti A partes ſumptæ; junge Dd, $D\delta$, erunt illæ duæ Aſymptoti. Ideoque Figura habet quatuor crura Hyperbolica ad duas rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si bb majus ſit $4ac$, crura jacent in angulis EDe, FDG; ſin minus jacent in angulis hiſce deinceps: ut conſtat ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 2. Hæc Figura (per *Coroll.* 1. *Prop.* 4.) ejus Aſymptotos non decuſſat, adeoque (per *Coroll.* 2. *Prop.* 1.) crura quæ in eodem angulo jacent, ductu continuo ſemper conjunguntur.

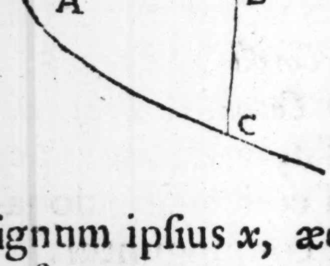
Coroll. 3. Unde hæc Figura ſemper conſtat ex Hyperbolis duabus Inſcriptis, in Aſymptoton angulis oppoſitis, jacentibus; & proinde unicam tantum ſpeciem conſtituit. Quæ eſt ſpecies prima Linearum ſecundi ordinis.



Coroll. 4. Si terminus ax^2 ſit negativus, curva nequit excurrere in infinitum: ergo (per *Prop.* 1.) in ſe redit; & conſtat ex Ovali unicâ. Quæ eſt ſpecies ſecunda. Hoc *Corollarium* facillime colligitur ex *primo Exemplo Scholii Propoſitionis octavæ.*

PROP. XIV. THEOR.

Si deſit terminus ax^2, *æquatio* $y^2 = * \; bx + c$ *deſignat figuram habentem duo tantum crura infinita Parabolica in eandem plagam extenſa.*



PAtet enim quod augendo Abſciſſam x in infinitum, ſimul augebuntur ordinatæ y valores, ergo curva habet duo crura infinita, & in eandem plagam protenſa; quoniam exiſtente x infinite magna, ordinata y eſt eâ infinite minor. Quod ſi mutetur ſignum ipſius x, æquatio evadet $y^2 = -bx + c$; poſtquam ergo eouſque augetur x, ut ſit $bx = c$;

cur-

curva ad illas partes ulterius pergere nequit, quia erit quadratum ordinatæ negativa quantitas, & inde ordinata ipſa impoſſibilis. Igitur curva habet duo tantum crura. Per methodum ſerierum

eſt $y = \pm \sqrt{bx} \pm \frac{c}{2\sqrt{bx}} + \&c.$ Unde (per *Prop.* 6.)

$\sqrt{bx}$ eſt Ordinata Aſymptoti ad Abſciſſam x pertinens, quumque hæc non ſit ordinata rectæ, crura ſunt Parabolica. Q. E. D.

Coroll. Crura hujus curvæ ſunt ſui generis ſimpliciſſima. Hæc figura conſtituit Linearum ſecundi ordinis ſpeciem tertiam; Et patet eas eſſe tres Coni ſectiones.

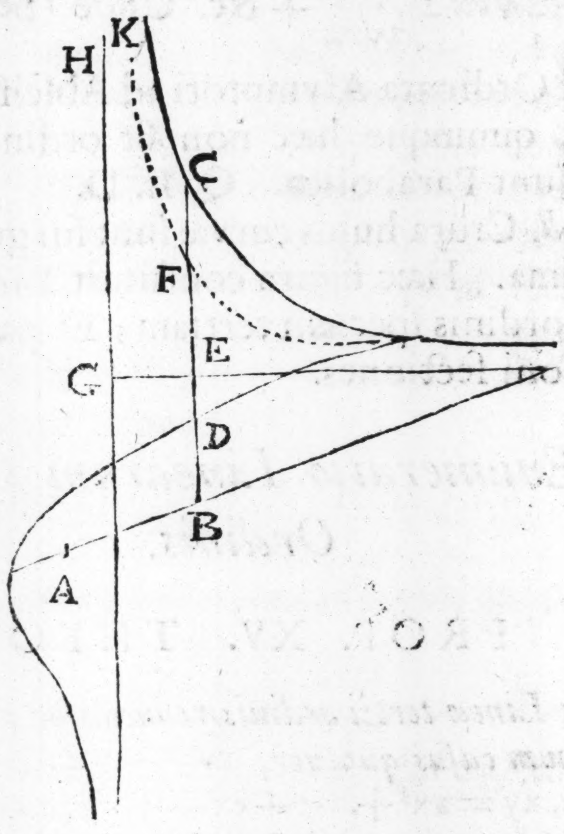
Enumeratio Linearum tertii Ordinis.

PROP. XV. THEOR.

Omnes Lineæ tertii ordinis reducuntur ad hos æquationum caſus quatuor, $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

ÆQuatio $\overline{z + a} \times v^2 = \overline{bz^2 + cz + d} \times v + ez^3 + fz^2 + gz + h$ (per *Coroll.* 1. *Prop.* 5.) comprehendit omnes Lineas *ſecundi* ordinis: unde, ſi probavero illam æquationem ſemper reduci poſſe ad unam quatuor dictarum formarum, conſtabit Propoſitio.

Caſ. 1. Si æquationis terminus nullus deſit, divide eam per $z+a$ coefficientem ipſius v^2, & erit $v^2 = \frac{\overline{bz^2+cz+d}\times v+ez^3+fz^2+gz+h}{z+a}$, atque ex-



trahendo radicem $v=\frac{bz^2+cz+d}{2z+2a}\pm p$, ubi p eſt latus quadratum partis valorum ipſius v vinculo quadratico incluſæ. Sit $AB=z$, BDC ordinata ſecans curvam in duobus punctis, adeoque rectarum BD, BC quamlibet ambigue repreſentat ordinata v: Id eſt $BC=\frac{bz^2+cz+d}{2z+2a}+p$,

BD

$BD = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a} - p$. Harum differentia $CD = 2p$. Biseca CD in F, ut sit $DF = p$, huic adde BD, & erit $BF = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a}$, quæ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas ad curvam terminatas: quæque in casu præsenti est Hyperbola Conica. Sit ea KF, ejusque Asymptoti GE, GH; quarum hæc parallela est ordinatæ DC, propterea quod ordinata EF secat Hyperbolam in unico puncto F. Sume Abscissam novam $GE = x$, ordinatam novam EC vel $ED = y$; eritque $EC = CF + FE$, $ED = CF - FE$, vel more Algebraico $y = EF \pm EC$. Unde in æquatione ad curvam $2EF$ erit coefficiens ipsius y, ut constat ex natura æquationis Quadraticæ. Jam sit e data quantitas, & ex naturâ Hyperbolæ erit $EF = \frac{e}{2x}$; ergo $\frac{e}{x}$ erit coefficiens ipsius y in æquatione curvam definiente: atque exinde æquatio necessario induet hanc formam $yy - \frac{ey}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$ vel $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Cas. 2. Quod si desit terminus zv^2, æquatio erit hujusmodi $av^2 = \overline{bz^2 + cz + d} \times v + ez^3 + fz^2 + gz + :$ & erit $BF = \frac{bz^2 + cz + d}{2a}$, quæ est ordinata Parabolæ

rabolæ Conicæ bisecantis ordinatas. Si quando hoc accidat, mutetur Abscissa z in Ordinatam v, & æquatio erit $v^3 + \overline{az+b} \times v^2 + \overline{cz+d} \times v = ez^2 + fz + f$; tolle terminum v^3 (per *Coroll.* 4. *Prop.* 5.) & æquatio erit $\overline{az+b} \times v^2 + \overline{cz+d} \times v = ez^2 + fz + g$: quæ (per *Cas.* 1.) convertitur in hanc $xy^2 - ey = bx^2 + cx + d$, & hæc forma continetur inpriori $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q.E.D.

Cas. 3. Si desint termini av^2, dv, erit $BF = \frac{bz^2+cz}{cz} = \frac{bz+c}{2}$, quæ est ordinata rectæ bisecantis ordinatas. In illo casu sume abscissam x in rectâ illâ bisecante à debito initio computatam, & ordinatam y priori v parallelam; & æquatio induet hanc formam $xyy = ax^3 + bx^2 + cx + d$, quæ continetur in priori. Q. E. D.

Cas. 4. Si desint termini zv^2, av^2, restabit $\overline{bz^2+cz+d} \times v = ez^3 + fz^2 gz + h$, quo in casu ordinata occurrit curvæ in unico tantum puncto. Tolle terminum ez^3 (per *Coroll.* 4. *Prop.* 5.) & æquatio erit $\overline{bz^2+cz+d} \times v = fz^2 + gz + h$: hæc æquatio mutando abscissam z in ordinatam v, convertetur (per *Cas.* 1.) in hanc $xy^2 - ey = cx + d$, quæ continentur in formâ $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Cas. 5. Si desint termini zv^2, av^2, bz^2v, manebit $czv + dv = ez^3 + fz^2 + gz + h$, ubi si pro v scribas y, & $x - \frac{d}{c}$ pro z, orietur $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Cas.

Caſ. 6. Si deſint termini zv^2, bz^2v, erit $BF = \frac{cz+d}{2a}$, quæ eſt ordinata Lineæ biſecantis ordinatas CD; in illo caſu ſume Abſciſſam x in rectâ illâ biſecante, & ordinatam v priori parallelam, & prodibit $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Caſ. 7. Si deſint termini zv^2, av^2, bz^2v, czv, reſtabit $dv = ez^3 + fz^2 + gz + h$, quæ eſt hujus formæ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Q. E. D.

Reducuntur ergo omnes Lineæ tertii ordinis ad quatuor ſequentes æquationum caſus,

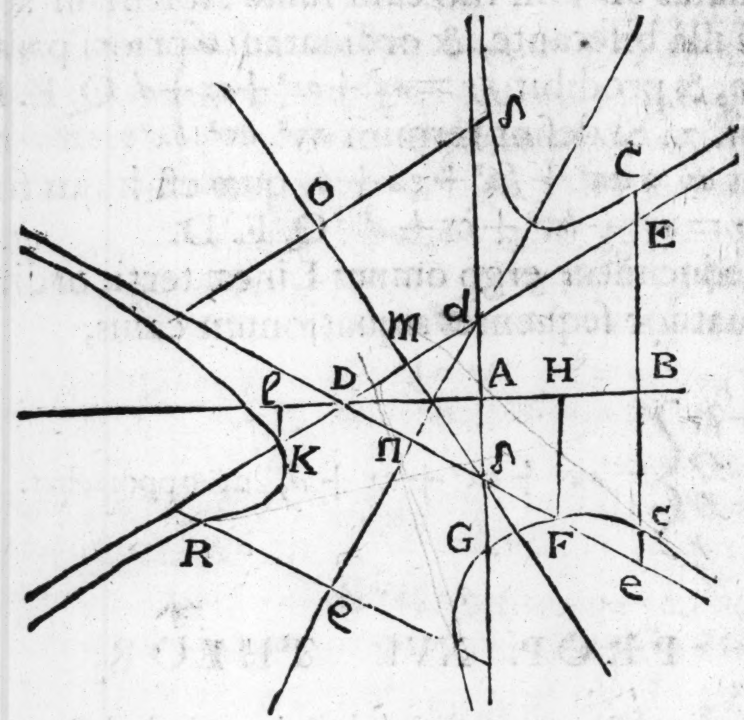
$$\left.\begin{array}{r} xy^2 - ey \\ xy \\ yy \\ y \end{array}\right\} = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ ut opportebat.}$$

PROP. XVI. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *deſignat figuram habentem ſex crura Hyperbolica ad tres Aſymptotos jacentia.*

SIT $AB = x$, $BC = y$. Invenies $y = \frac{e}{2x} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e^2}{4x^2}}$; reducatur (per Theor. *Neutoni*) pars irrationalis in ſeriem $\pm \frac{e}{2x} \pm \frac{d}{e}$ &c. eo citius convergentem, quo minor eſt x; at-

atque provenient ordinatæ valores $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. $- \frac{d}{e}$ &c. Valor hic ultimus indicat curvam se-



care ordinatam primam, puta in *G*. Valor autem ille $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. indicat (per *Coroll.* 2. *Prop.* 7.) ordinatam primam esse Asymptoton, & habere duo crura ad diversas ejus partes posita, & in plagas oppositas tendentia. Evadat jam x utcunque magna & augebuntur simul ordinatæ valores sine limite, quare curva habet alia duo crura infinita. Mutetur signum ipsius x, & æquatio evadet $-xy^2 - ey = -ax^3 + bx^2 - cx + d$, vel $xy^2 + ey = ax^3 - bx^2 + cx - d$, ubi patet quod etiam-

etiamnum augeri poteſt x in infinitum & ſimul augebuntur ordinatæ valores, nunquam enim evadent impoſſibiles quum abſciſſa eſt ſatis magna? Unde Figura habet alia duo crura & omnino ſex.

Reducatur jam y in ſeriem eo citius convergentem quo major eſt x, atque invenietur $BC = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - bb + 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}} +$, &c. $Bc = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - bb - 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}}$ &c. Habet igitur (per *Prop.* 6.) figura duas Aſymptotos rectas ab Abſciſsâ hinc inde æqualiter jacentes: nam ſit $AD = \frac{b}{2a}$, & Ad, $A\delta$ hinc inde æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, junge Dd, $D\delta$ erunt illæ duæ Aſymptoti. Ergo Figura habet ſex crura ad tres Aſymptotos rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si deſit terminus bxx, tres Aſymptoti, evaneſcente triangulo $Dd\delta$, in uno eodemque puncto conveniunt.

Coroll. 2. Si figura Ovalem conjugatam habeat, ea ſemper continetur intra triangulum $Dd\delta$; nam ſi conſiſteret extra, duci poterat recta ſecans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Idem intellige de Nodo, Cuſpide & puncto conjugato. Ut enim Punctum eſt Ovalis infinite parva, ſic Cuſpis eſt Nodus infinite parvus.

Coroll. 3. Ergo si desit terminus bx^2, hoc est, si tres Asymptoti in uno eodemque puncto conveniunt, Figura nunquam habet Ovalem, Nodum Cuspidem aut Punctum conjugatum: quia (per *Coroll.* 1, 2.) evanescit triangulum intra quod semper consistit Ovalis, Nodus, Cuspis vel punctum conjugatum.

Coroll. 4. Duc δMO bisecantem Dd, in M, item OP Asymptoto Dd parallelam secantem curvam in P. Sitque Abscissa $MO = z$, Ordinata $OP = v$; & eâdem ratione, quâ existente $AB = x$, $BC = y$, prodit $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, prodibit etiam $zv^2 - Ev = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Et si ducatur dNQ bisecans $D\delta$ in N, & QR Asymptoto $D\delta$ parallela, curvam secans in R, & sit $NQ = s$, $RQ = t$, orietur $st^2 - et = \alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + \delta$. Qui de hisce dubitat utatur calculo.

Coroll. 5. Unde si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ desit terminus bx^2, in æquationibus duabus reliquis deerunt termini respectivi Bz^2, $\beta\varsigma^2$. Et contra, ut constat ex *Coroll.* 1.

Coroll. 6. Si desit terminus ey, Abscissa est Diameter bisecans Ordinatas: Et contra, si AB sit Diameter, deest terminus ey. Simile intellige de Abscissis MO, NQ earumque Ordinatis.

Coroll. 7. Si desit terminis ey, Curva non decussat Asymptoton $d\delta$; nam existente x infinite parva erit $y = \pm\sqrt{\frac{d}{x}}$, adeoque (per *Coroll.* 3. *Prop.* 7.) crura jacent ad easdem Asymptoti $d\delta$ partes & in plagas oppositas feruntur: & inde (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) tria intersectionis puncta abeunt

abeunt in infinitum; adeoque nullum restabit punctum in quo curva decussare potest ejus Asymptoton. Et contra, si curva non decusset Asymptoton, deest terminus ey & Abscissa AB est Diameter, atque crura jacent ad easdem Asymptoti $d\delta$ partes, in plagas oppositas lata. Simile intellige de Asymptotis duabus reliquis cum Abscissis δO, dQ.

Coroll. 8. Si sit $bb - 4ac = 4ae\sqrt{a}$, curva non decussat Asymptoton Dd, adeoque (per *Coroll.* 7.) MO est Diameter. Nam est $AB = x$, $BC = y$, $BE = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$; quod si curva secaret Asymptoton Dd, erit in illo casu $BE = BC$, id est $y = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$. In æquatione pro y substitue hunc valorem, & invenies $x = \frac{4ad + 2be\sqrt{a}}{bb - 4ac - 4ae\sqrt{a}}$ $= AL$, ubi LK est Ordinata transiens per K punctum intersectionis. Jam sit $bb - 4ac - 4ae\sqrt{a} = 0$, vel $bb - 4ac = 4ae\sqrt{a}$, & erit AL infinite magna, adeoque punctum intersectionis nullibi erit. Similiter si F sit punctum in quo curva secat Asymptoton $D\delta$, & FH ordinata; erit $AH = \frac{4ad - 2bc\sqrt{a}}{bb - 4ac + 4ae\sqrt{a}}$, unde si sit $bb - 4ac = -4ae\sqrt{a}$, Curva non decussat Asymptoton $D\delta$, & est NQ Diameter.

Coroll. 9. Ergo si neque terminus ey desit, neque sit $bb - 4ac = \pm 4ae\sqrt{a}$, curva nullam habe-

 bit

bit Diametrum, sin eorum alterutrum accidit, curva unicam habebit Diametrum & tres, si utrumque. Sciendum enim est Ordinatas bisectas esse alicui Asymptoto parallelas, ut constat per conversum *Prop.* 5. ejusque *Scholion*; & Diametrum semper bisecare Ordinatas in Asymptotis terminatas, quia curva concidit cum Asymptotis ad distantiam infinitam: adeoque Diametrum transire per intersectionem duarum Asymptoton necesse est.

Coroll. 10. Igitur hæc curva vel habet nullam, unam vel tres Diametros: duas enim solas habere nequit.

Coroll. 11. Curva quæ nullam habet Diametrum, secat tres ejus Asymptotos, singulam in unico puncto.

Coroll. 12. Curva quæ unicam habet Diametrum decussat duas Asymptotos, per quarum intersectionem transit illa Diameter: at tertiam non secat.

Coroll. 13. Curva quæ tres habet Diametros Asymptoton nullam omnino secabit.

Coroll. 14. Si $bb - 4ac - 4ae\sqrt{a}$ sit quantitas affirmativa, Asymptotos *DE* jacet inter curvam & Abscissam; sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton & Abscissam. Et si $bb - 4ac + 4ae\sqrt{a}$ sit affirmativa quantitas, Asymptotos *De* jacet inter curvam & Abscissam, sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton & Abscissam.

Coroll. 15. Si desit terminus *ey*, id est, si *AB* sit Diameter, & sit $bb - 4ac$ quantitas affirmativa, curva continet Asymptotos *Dd*, *Dδ* in suo sinu.

ſinu. At ſi quantitas illa ſit negativa, Aſymptoti jacent extra crura adjacentia.

Coroll. 16. Si figura habet tres Diametros, & ſit d quantitas affirmativa, crura jacent extra Aſymptotos; ſin minus intra. Corollaria hæc tria ultima conſtant ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 17. Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ terminus ax^3 ſit negativus, figura habebit duo tantum crura Hyperbolica ad ordinatam primam jacentia. Nam ſeries $\pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$ + &c. ex cujus poſſibilitate pendent reliqua quatuor crura cum earum Aſymptotis erit impoſſibilis. Conſtat etiam hoc *Corollarium* ex *Exemplo tertio Scholii Prop.* 7.

Notandum eſt in hâc Propoſitione ejuſque Corollariis per Diametrum ſemper intelligi Diametrum quæ biſecat Ordinatas duarum dimenſionum.

Poſtquam compertus eſt numerus crurum alicujus curvæ, ejus ſpecies enumerantur determinando quæ crura ductu continuo conjunguntur; ut & deſcribendo Ovales, Nodos, Cuſpides & Puncta conjugata ſiquæ ſint. Hæc omnia ex Propoſitionibus præcedentibus facillime perficiuntur.

Enumeratio Specierum curvæ quam deſignat æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Hyperbolæ novem ſequuntur, ſex cruribus, ad tres rectas triangulum capientes, jacentibus præditi; quæ Diametro ad Ordinatas duarum di-

dimensionum destituuntur. *Vide figuras in Enumeratione* Neutonianâ *Linearum tertii ordinis.*

Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, extrahatur radix y, invenietur $y = \frac{e}{2x} \pm \frac{\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee}}{x}$, patet ergo ordinatam possibilem esse, quando quantitas $ax^4 + bx^3$ $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ vinculo quadratico inclusa est affirmativa, & impossibilem quando negativa: vices autem possibilitatis & impossibilitatis innotescunt per *Exemp.* 3. *Prop.* 8. describendo Parabolam cujus abscissa est x & ordinata $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$.

Species I. *Fig.* 1, 2.

Si æquationis $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ radices omnes AP, $A\varpi$, $A\pi$, Ap sint reales ejusdem signi & inæquales, Figura constat ex tribus Hyperbolis Inscriptâ, Circumscriptâ & Ambigenâ. Nam (per *Exemp.* 3. *Prop.* 8.) ordinata inter puncta P, ϖ vel π, p erecta est imaginaria, & realis erit ordinata alio quovis abscissæ puncto insistens. Erige ordinatas PT, $\varpi\tau$, $\pi\daleth$, pt, & hæ tangent curvam in totidem punctis T, τ, $\daleth$, t: etenim in illo casu ordinatarum vel summa vel differentia evanescit, prout ad diversas vel easdem Abscissæ partes extenduntur. Unde puncta T, τ, $\daleth$, t, sunt limites possibilitatis & impossibilitatis, atque adeo intra medios limites τ, $\daleth$ continetur Ovalis. Crura vero quæ jacent ad angulum D conjunguntur: quoniam ordi-

ordinata inter p, π erecta non occurit curvæ. Sed & crura quæ jacent ad angulos d, δ etiam conjunguntur; aliter enim, si fieri potest, conjungantur, & duci poterit recta per Ovalem secans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Ex supradictis abunde patet quod crura semper jacent ad diversas Asymptoti partes; & quod Hyperbola Conica bisecat ordinatas duarum dimensionum; ex quarum considera-tione necessario sequitur Hyperbolarum unam esse Inscriptam, alteram Circumscriptam, & tertiam Ambigenam: Quæ est Species prima.

Species II. *Fig.* 3, 4.

Si ex radicibus duæ maximæ Ap, $A\pi$, (*fig.* 3.) vel duæ minimæ AP, $A\varpi$ (*fig.* 4.) sint æquales, Ovalis tangit Hyperbolam Circumscriptam, & tangendo evadit Nodus, atque Hyperbola, Nodata; adeoque Figura constat ex tribus Hyperbolis Inscriptâ, Nodatâ & Ambigenâ: Quæ est Species secunda.

Species III. *Fig.* 5, 6.

Si radices tres maximæ (*fig.* 5.) vel tres minimæ (*fig.* 6.) inter se æquentur, Nodus evadit infinite parvus, id est, Cuspis, & Figura constat ex Hyperbolis tribus Inscriptâ, Cuspidatâ & Ambigenâ. Quæ est Species tertia.

Notandum est crura Hyperbolæ Nodatæ semper esse versus se invicem convexa; aliter enim duci poterat recta secans curvam in quatuor punctis. Idem intellige de Cuspidatâ, si-

quidem

quidem Cuſpis nihil aliud eſt quam Nodus infinite parvus.

Species IV. *Fig.* 7.

Si è radicibus duæ mediæ æquentur (*fig.* 7.) Ovalis, quæ in ſpecie primâ obtinebat, evadit infinite parva, id eſt, Punctum. Et Figura conſtat ex Hyperbolis tribus Inſcriptâ, Circumſcriptâ & Ambigenâ cum Puncto conjugato: Quæ eſt Species quarta.

Species V, VI. *Fig.* 7, 8, 9, 10.

Si è radicibus duæ mediæ ſint impoſſibiles, & reliquæ duæ inæquales & ejuſdem ſigni (nam contraria habere nequeunt) impoſſibile erit itidem curvam habere Ovalem, Nodum, Cuſpidem aut Punctum conjugatum; adeoque Figura erit pura conſtans ex Hyperbolis tribus Inſcriptâ, Circumſcriptâ & Ambigenâ. Si hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli *Ddδ*, (*fig.* 7, 8.) Species eſt quinta; ſin jaceant ad latera ejuſdem (*fig.* 9, 10.) Species eſt ſexta.

Species VII, VIII. *Fig.* 11, 12, 13, 14.

Si è radicibus duæ ſint æquales, & alteræ duæ vel impoſſibiles (*fig.* 11, 13.) vel poſſibiles (*fig.* 12, 14.) cum ſignis quæ à ſignis æqualium radicum diverſa ſunt, quatuor crura in uno puncto conveniunt; ſcilicet Hyperbolæ quæ in ſpeciebus quintâ & ſextâ erant circumſcriptæ & ambigenæ nunc conſtituunt Cruciformem. Adeoque Figura conſtat ex Inſcripta & Cruciformi.

formi. Quod si jaceat Inscripta ad angulum trianguli $Dd\delta$ (*fig.* 11, 12.) Species est septima. At si jaceat ad latus (*fig.* 13, 14.) Species est octava.

Species IX. *Fig.* 15, 16.

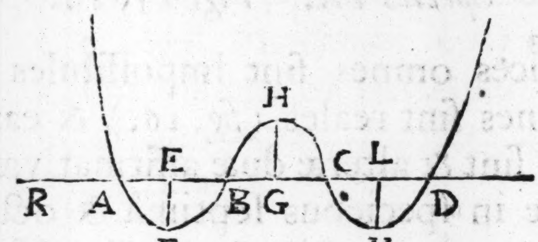
Si radices omnes sint impossibiles (*fig.* 15.) vel si omnes sint reales (*fig.* 16.) & earum duæ negativæ sint & alteræ duæ affirmativæ, Hyperbolæ quæ in speciebus septimâ & octavâ conjungebantur & constituebant Cruciformen ab invicem iterum seperantur; & Figura constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis in angulis Asymptoton oppositis jacentibus, cum Anguinea circa tertiam Asymptoton flexâ: Quæ est Species nona.

Si radices duæ æquentur & duæ reliquæ etiam æquentur, figura migrat in sectionem Conicam cum lineâ rectâ. Nam $\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee}$ erit quantitas rationalis, & inde æquatio $xy^2-ey=ax^3+bx^2+cx+d$ bipartitur in duas æquationes, quarum una designat Hyperbolam Conicam, altera rectam.

Hi sunt casus omnes possibiles radicum æquationis $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee$ propterea quod $\frac{1}{4}ee$ terminus ultimus est affirmativus, quippe quadratum realis quantitatis. Ut vero hoc melius intelligatur, casus unius impossibilitatem ostendam, cujus ad Exemplum reliquorum impossibilitas facillime evincitur.

Si æquationis $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$, radices tres idem habeant ſignum, dico quartum diverſum habere non poſſe.

Deſcribatur Parabola æquatione $z=ax^4+bx^3$ $cx^2+dx+\frac{1}{4}e^2$ deſignata; quoniam æquationis



$ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ quatuor radices ponuntur reales, Abſciſſa ſecat curvam in quatuor punctis: ea ſunto A, B, C, D. Jam ſi fieri poſſit, ſit principium Abſciſſæ inter puncta A, B adeo ut radix EA ſit negativa & reliquæ tres affirmativæ: ſit EF Ordinata prima; & exiſtente $x=0$, erit $y=\frac{1}{4}ee=EF$: Sed EF eſt quantitas negativa, ergo etiam $\frac{1}{4}ee$ quantitas negativa, quod eſt abſurdum. Similiter oſtendetur quod Principium Abſciſſæ jacere nequit inter puncta C, D, quoniam ordinatæ ad Abſciſſæ partem CD erectæ ſunt omnes negativæ. Igitur conſtat propoſitum; nam ſi tres radices eadem habent ſigna, & quarta diverſum: principium Abſciſſæ vel erit inter puncta C, D vel A, B. Sed cum hoc fieri nequit, neque illud fieri poteſt.

Eodemque modo oſtenditur, quod ſi æquationis $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices duæ ſint impoſſibiles, reliquæ duæ idem ſignum habebunt.

Hy-

Hyperbolæ quatuordecem cum ſex cruribus ad tres Aſymptotos triangulum capientes jacentibus, unicam habentes Diametrum ad Ordinatas duarum dimenſionum.

Si deſit terminus ey Figura habet Diametrum ad ordinatas duarum dimenſionum, ſcilicet Abſciſſam: & æquatio erit $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Species X, XI. *Fig.* 17.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ radices omnes ſint reales ejuſdem ſigni & inæquales, Figura conſtat ex tribus Hyperbolis ad tres angulos trianguli $Dd\delta$ jacentibus cum Ovali intra triangulum conſiſtenti. Nam ſint tres radices $A\tau$, $A\urcorner$, At, & erunt T, $\urcorner$, t limites poſſibilitatis & impoſſibilitatis (*per Exemp.* 2. *Prop.* 8.) atque intra τ, t continetur Ovalis. Crura vero, quæ ad eoſdem angulos trianguli $Dd\delta$ jacent conjungi, eodem modo oſtenditur, quo in ſpecie primâ. Si Aſymptoti Dd, $D\delta$ jaceant intra crura (*fig.* 17.) curva conſtat ex tribus Hyperbolis, duabus Inſcriptis ad d, δ & circumſcriptâ ad D: Quæ eſt Species decima.

Sin Aſymptotos jaceant extra crura, Figura conſtat ex tribus Hyperbolis, Inſcriptâ ad D, & Ambigenis duabus ad d, δ: Quæ eſt Species undecima.

Species XII. *Fig.* 18.

Si radices duæ maximæ At, $A\urcorner$ æquentur, Ovalis tangit Hyperbolam Circumſcriptam, & tangendo evadit Nodus, atque Hyperbola Nodata;

datâ: Et Figura constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis ad d, δ cum Nodatâ ad D: Quæ est Species decima secunda.

Species XIII. *Fig.* 19.

Si radices tres æquentur, Nodus evadit Cuspis, & curva constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis ad d, δ, & Cuspidata ad D: Quæ est Species decima tertia.

Species XIV, XV. *Fig.* 20, 21.

Si radices duæ minimæ æquentur; Ovalis, quæ in speciebus 10^{ma}, & 11^{ma}, obtinebat evadit Punctum. Et Figura vel constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis ad d, δ (*fig.* 20.) cum Circumscriptâ ad D: Quæ est decima quarta; vel constat ex Hyperbolis duabus Ambigenis ad d, δ (*fig.* 21.) cum Inscriptâ ad D: Quæ est Species decima quinta.

Species XVI, XVII, XVIII, XIX.
Fig. 20, 21, 22, 23.

Si ex radicibus duæ sint impossibiles, puræ habebuntur tres Hyperbolæ sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato. Et hujus species sunt quatuor: nempe decima sexta (*fig.* 20.) si Circumscripta jaceant ad D, decima septima (*fig.* 21.) si Inscripta jaceat ad D; decima octava (*fig.* 22.) si circumscripta jaceat ad latus trianguli, & decima nona (*fig.* 23.) si Inscripta jaceat ad latus trianguli.

Spe-

Species XX, XXI. *Fig.* 25, 26.

Si radices sint æquales, & tertia est signi diversi, quatuor crura in Abscissâ concurrunt. Et Figura constabit ex Inscriptâ & Cruciformi. Quod si Inscripta (*fig.* 25.) jaceat ad angulum trianguli, Species est vigesima; sin jaceat Inscripta (*fig.* 24.) ad latus trianguli, Species est vigesima prima.

Species XXII, XXIII. *Fig.* 26, 27.

Si radices duæ sint inæquales & tertia est signi diversi, Crura quatuor quæ in speciebus duabus novissimis conjungebantur ab invicem segregantur. Et Figura constabit ex Hyperbolis duabus Inscriptis, in angulis Asymptoton oppositis jacentibus cum Conchoide intermediâ. Si Conchois (*fig.* 24.) jaceat ad easdem Asymptoti $d\delta$ partes cum triangulo $Dd\delta$, Species est vigesima secunda; sin jaceat ad diversas (*fig.* 25.) Species est vigesima tertia. Hi sunt casus omnes radicum æquationis $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Hyperbolæ quatuor cum sex cruribus ad tres Asymptotos triangulum facientes jacentibus, quæ tres habent Diametros ad ordinatas duarum dimensionum.

Si in æquatione $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sit $bb = 4ac$, Figura habet tres Diametros ad ordinatas duarum dimensionum: & crura eandem Asymptoton adjacentia ad easdem ejus partes semper in plagas oppositas protensa jacent. Nunquam

quam hæc Figura decuſſat Aſymptotos, adeoque ſemper conſtat ex tribus Inſcriptis Hyperbolis. Sequitur (per *Coroll.* 9. *Prop.* 16.)

Species XXIV. *Fig.* 28.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + \frac{bb}{4a} x + d = 0$ (poſito pro c ejus valore $\frac{bb}{4a}$) radices tres ſint reales, ejuſdem ſigni & inæquales, Figura conſtat ex Hyperbolis tribus Inſcriptis cum Ovali intra triangulum $Dd\delta$: Quæ eſt Species vigeſima quarta.

Species XXV. *Fig.* 28.

Si radices duæ minimæ æquentur, Ovalis in punctum evaneſcet, & Figura conſtat ex tribus Hyperbolis Inſcriptis cum Puncto conjugato: Quæ eſt Species vigeſima quinta.

Species XXVI, XXVII. *Fig.* 28, 29.

Si radices duæ imaginariæ ſint, Figura conſtat ex tribus Hyperbolis Inſcriptis ſine Ovali vel puncto conjugato. Quod ſi hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli $Dd\delta$ (*fig.* 28) Species eſt vigeſima ſexta, ſin jaceant (*fig.* 29.) ad latera ejuſdem, Species eſt vigeſima ſeptima.

Hi ſunt omnes caſus radicum æquationis $ax^3 + bx^2 + \frac{bb}{4a} x + d = 0$; nam impoſſibile eſt duas

ejus

ejus radices maximas, vel omnes inter ſe æquari. Impoſſibile itidem eſt duas radices eſſe ejuſdem ſigni, & tertiam ſigni ab iis diverſi.

Hyperbolæ novem cum ſex cruribus jacentibus ad tres Aſymptotos ad unum punctum convergentes.

Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deſit terminus bx^2, tres Aſymptoti (per *Coroll.* 1. *Prop.* 16.) in uno eodemque puncto conveniunt. Et in illo caſu (per *Coroll.* 3. *Prop.* 16.) Figura nunquam habet Ovalem, Nodum, Cuſpidem vel Punctum conjugatum: Species ejus ergo omnes ſunt puræ, & ex puris hactenus enumeratis facillime enumerantur: ut ſequitur.

Vertuntur Species quinta & ſexta in vigeſimam octavam (*fig.* 30.)

Septima & octava in vigeſimam nonam (*fig.* 31.)

Nona in triceſimam (*fig.* 33.) quando Anguinea tranſit per centrum, & in triceſimam primam (*fig.* 32.) ubi non tranſit per centrum *A*.

Hæ quatuor Species Diametrum non habent.

Vertuntur ſpecies decima ſexta & decima octava (*fig.* 34.) in triceſimam ſecundam.

Species decima ſeptima & decima nona (*fig.* 35.) in triceſimam tertiam.

Vigeſima & vigeſima prima (*fig.* 36.) in triceſimam quartam.

Vigeſima ſecunda & vigeſima tertia (*fig.* 37.) in triceſimam quintam.

Et

Et hæc quatuor Species unicam habent Diametrum.

Ac denique vertitur Species vigesima sexta & vigesima septima (*fig.* 38.) in tricesimam sextam. Hæc Figura habet tres Diametros.

Nulla hic oriri potest difficultas, modo consideremus specierum singularum duarum, in unam hic coalescentium, diversitatem antea debitam fuisse triangulo ab Asymptotis comprehenso, quod nunc in nihil evanuit.

Hyperbolæ sex cum duobus cruribus ad eandem Asymptoton jacentibus.

Si æquationis $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ terminus ax^3 sit negativus, Figura (per *Coroll.* 17. *Prop.* 16.) habebit duo tantum crura ad unicam Asymptoton jacentia: & hæc crura (per *Coroll.* 11. *Prop.* 16.) ad diversas Asymptoti partes in plagas oppositas extensa jacebunt. In illo casu erit $y = \dfrac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2}}{x}$ ubi constat ordinatam y fore possibilem quando quantitas $-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2$ est affirmativa, & impossibilem quando negativa.

Species XXXVII. *Fig.* 39.

Si æquationis $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ radices omnes sint reales & inæquales, eæ sunto AP, $A\varpi$, $A\pi$, Ap; erige ordinatas PT, $\varpi\tau$, $\pi\urcorner$, pt, & erunt T, τ, $\urcorner$, t limites; & intra τ, t continetur Ovalis: adeoque Figura constat ex Ovali cum An-

Anguinea circa Asymptoton flexâ: Quæ est Species tricesima septima.

Species XXVIII. *Fig.* 40.

Si radices duæ mediæ *AP*, *Ap* æquentur Ovalis tangit Anguineam, & inde Figura constat ex Hyperbolâ unica Nodata: Quæ est Species tricesima octava.

Species XXXIX. *Fig.* 41.

Si radices tres ejusdem signi sint æquales, Nodus migrat in Cuspidem, & Figura constat ex unicâ Cuspidatâ: Quæ est Species tricesima nona.

Species XL. *Fig.* 43.

Si è radicibus ejusdem signi duæ maximæ æquentur; Ovalis quæ in specie 37^{ma}. obtinebat, in punctum minuetur: & Figura constat ex Puncto cum Anguineâ circa ordinatam primam flexâ: Quæ est Species quadragesima.

Species XLI, XXII. *Fig.* 42, 43.

Si è radicibus duæ sint impossibiles, manebit Anguinea pura: Quod si illa transit per centrum (*fig.* 43.) Species est quadragesima prima.

At si non transit per centrum (*fig.* 42.) Species est quadragesima secunda.

Hyperbolæ septem cum duobus cruribus ad eandem Asymptoton extensis cum Diametro ad Ordinatas duarum dimensionum.

Si desit terminus *ey*, Abscissa est Diameter, & (per *Coroll.* 7. *Prop.* 16.) crura ad easdem

ordinatæ primæ partes jacentia in plagas contrarias in infinitum ſerpunt. Invenietur $y = \pm \frac{\sqrt{-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx}}{x}$: adeoque omnes caſus æquationis pateſcunt deſcribendo Parabolam, æquatione $z = -ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ definitam.

Species XLIII. *Fig.* 44.

Si æqations $ax^3 = bx^2 + cx + d$ radices ſint omnes reales ejuſdem ſigni & inæquales, Figura conſtat ex Conchoide cum Ovali ad convexitatem ejus: Quæ eſt Species quadrageſima tertia.

Species XLIV. *Fig.* 45.

Si radices duæ ſint inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia contrarii, Figura conſtat ex Conchoide cum Ovali ad concavitatem: Quæ eſt Species quadrageſima quarta.

Species XLV. *Fig.* 46.

Si radices omnes ſint ejuſdem ſigni, & duæ minimæ æquentur, Figura conſtat ex Hyperbola Nodatâ: Quæ eſt Species quadrageſima quinta.

Species XLVI. *Fig.* 47.

Si tres radices æquentur, Nodus evadit Cuſpis, & Figura evadit Ciſſois Veterum: Quæ eſt Species quadrageſima ſexta.

Spe-

Species LXVII. *Fig.* 49.

Si radices duæ maximæ æquentur & tertia ſit ejuſdem ſigni, Figura conſtat ex Conchoide cum Pnncto ad convexitatem: Quæ eſt Species quadrageſima ſeptima.

Si radices duæ æquentur & tertia ſit ſigni contrarii, Figura conſtat ex Conchoide cum Puncto ad concavitatem (*fig.* 49.) Quæ eſt Species quadrageſima octava.

Species XLIX. *Fig.* 48, 49.

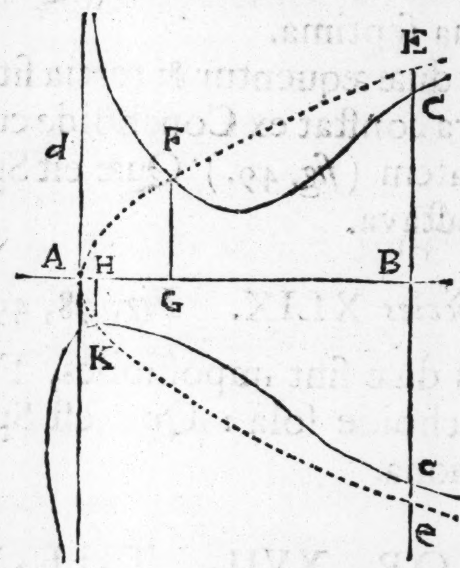
Si radices duæ ſint impoſſibiles, Figura conſtat ex Conchoide ſolâ: Quæ eſt Species quadrageſima nona.

PROP. XVII. THEOR.

ÆQuatio $xy^2 - ey = * bx^2 + cx + d$, deſignat Figuram habentem quatuor crura quorum duo ſunt Hyperbolica ad Ordinatam primam jacentia; & duo ſunt Parabolica in eandem plagam extenſa, quæ pro Aſymptoto ſortiuntur Parabolam *Conicam*.

Sit $AB = x$, $BC = y$. Invenies $y = \frac{\frac{1}{2}e}{x} \pm \frac{\sqrt{bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee}}{x}$: reducatur pars irrationalis in ſeriem $\frac{e}{2x} + \frac{d}{e}$ &c. eo citius convergentem quo minor eſt x; atque unus ordinatæ valor

lor erit $-\frac{d}{e}$ &c. alter $\frac{e}{x}+\frac{d}{e}$ &c. valor ille primus indicat ordinatam primam ſecare curvam: & valor hic ultimus $\frac{e}{x}+\frac{d}{e}$ &c. (per



Coroll. 2. *Prop.* 7.) indicat ordinatam primam *Ad* eſſe Aſymptoton, habentem duo crura ad diverſas ejus partes jacentia, in plagas oppoſitas progredientia. Evadat jam x utcunque magna, & etiam ſine limite augebuntur Ordinatæ y duo valores: quæ curva habet alia duo crura infinita: Quod ſi mutetur ſignum ipſius x, hoc eſt, ſi ſumatur Abſciſſa ad alteras partes, terminus bx^2 evadet negativus; & inde augendo x ad illas partes Ordinata tandem evadet imaginaria. Igitur curva habet quatuor tantum crura infinita. Reducatur y in ſeriem $\pm\sqrt{bx}\pm\frac{c}{2\sqrt{bx}}$ &c. Unde (per *Prop.* 6.) $\pm\sqrt{bx}$ eſt Ordinata Aſym-

Aſymptoti quæ quidem eſt Parabola Conica, axem habens *AB*, Latus rectum *b*, & verticem *A*. Q. E. D.

Coroll. 1. Si terminus cx ſit affirmativus, Parabola Conica jacet intra crura hujus Figuræ; ſin negativus Parabola Conica Figuræ crura in ſinu ſuo complectitur: ut conſtat ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 2. Parabola hæc Conica nunquam ſecat curvam in pluribus punctis quam in duobus. Occurrat ordinata *BC* parabolæ *E*, & erit $BE = \pm\sqrt{bx}$, ideoque ubi Parabola ſecat curvam evadit $y = \pm\sqrt{bx}$, coeuntibus punctis *C*, *E*: & $yy = bx$, unde $x = \frac{yy}{b}$ quem valorem pro x in æquatione ſubſtitue, & invenietur $y = \frac{be \pm \sqrt{b^2e^2 - 4bcd}}{2c}$: puncta igitur interſectionis ad ſummum duo tantum ſunt, quum æquatio eadem determinans eſt duarum dimenſionum.

Coroll. 3. Igitur Parabola vel ſecat Figuram in duabus punctis vel in nullis; propterea quod æquatio Quadratica vel habet duas radices poſſibiles vel nullas.

Coroll. 4. Si $4cd$ majus ſit be^2, Parabola non ſecat curvam, quoniam æquatio $y = \frac{be \pm \sqrt{b^2e^2 - 4bcd}}{2c}$ puncta interſectionis determinans erit impoſſibilis. Nam quantitas vinculo Quadratico incluſa

clusa est negativa. Et in illo casu crura Parabolæ jacent intra crura Figuræ.

Coroll. 5. Si $4cd$ æqalis sit be^2, Parabola tangit curvam. Nam sint *F*, *K* puncta intersectionis *FG*, *KH* ordinatæ ad Abscissam; possunt hæ ordinatæ ad diversas vel easdem Abscissæ partes jacere: & si sit $4cd = be^2$ istarum rectarum evanescit differentia; adeoque coeunt intersectionis puncta, & ex iis coeuntibus conflatur punctum contactûs.

Coroll. 6. Si Parabola secet curvam in duobus punctis, jacent hæc puncta ad easdem vel diversas Abscisse partes, prout terminus cx est affimativus aut negativus: ut ex *Corollario* primo facile colligitur.

Coroll. 7. Si desit terminus ey, Abscissa est Diameter, & curva non decussat Asymptoton *Ad*, sed crura ad easdem ejus partes in plagas oppositas extensa jacebunt.

Coroll. 8. Et quando deest terminus ille ey, puncta intersectionis *FK* in eâdem ordinata jacebunt, coeuntibus punctis *G*, *H*.

Coroll. 9. Et in illo casu Parabola secat curvam, vel non secat, prout terminus cx est negativus aut affirmativus: ut constat ex *Corollario* secundo.

Enumerato Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - ey = * bx^2 + cx + d$.

Figuræ septem partim Hyperbolicæ, partim Parabolicæ, scilicet quæ habent duo crura Hyperbolica, & duo Parabolica.

Spe-

Species L. *Fig.* 50.

Si æquationis $bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ extrahantur radices tres AP, $A\varpi$, $A\pi$, & ab earum extremis erigantur Ordinatæ totidem PT, $\varpi\tau$, $\pi\rceil$, hæ tangent curvam in punctis T, τ, $\rceil$, qui ſunt limites. Nam ſi tres radices ſint omnes reales ejuſdem ſigni & inæquales, crura Hyperbolica & Parabolica ad eaſdem Abſciſſæ partes poſitæ conjunguntur, & intra limites τ, $\rceil$, continetur Ovalis: Quæ eſt Species quinquageſima.

Species LI. *Fig.* 51.

Si è tribus radicibus ejuſdem ſigni duæ minores inter ſe æquentur, Ovalis accedet ad unam figurarum Hyperbolico-Parabolicarum Nodum efficiens: Quæ eſt Species quinquageſima prima.

Species LII. *Fig.* 52.

Si tres radices æquentur, Nodus migrabit in Cuſpidem; quæ eſt Species quinguageſima ſecunda.

Species LIII. *Fig.* 53.

Si è tribus radicibus ejuſdem ſigni, duæ majores æquentur, Ovalis evaneſcet in Punctum conjugatum: Quæ eſt Species quinquageſima tertia.

Species LIV. *Fig.* 54, 53.

Si duæ radices ſint imaginariæ: manebunt duæ puræ figuræ: Quæ eſt Species quinquageſima quarta.

Spe-

Species LV. *Fig.* 55.

Si radices duæ æquentur, & tertia est signi contrarii; Figura evadit Cruciformis quæ est Species quinquagesima quinta.

Species LVI. *Fig.* 56.

Si radices duæ sint inæquales, & tertia est signi contrarii; Figurâ constat ex Anguinea circa Ordinatam primam flexâ, cum Parabolâ: Quæ est Species quinquagesima sexta.

Figuræ quatuor Hyperbolo-Parabolicæ cum Dia-Diametro Abscissâ.

Species LVII. *Fig.* 57.

Si æquationis $bx^2+cx+d=0$ radices sint impossibiles, crura Parabolica junguntur cum Hyperbolicis ad easdem Abscissæ partes: Quæ est Species quinquagesima septima.

Species LVIII. *Fig.* 58.

Si radices duæ sint æquales & ejusdem signi, Figura evadit Cruciformis: Quæ est Species quinquagesima octava.

Species LIX. *Fig.* 59.

Si radices sint ejusdem signi & inæquales, Figura constat ex Conchoide cum Parabola ad easdem partes Ordinatæ primæ: Quæ est Species quinquagesima nona.

Spe-

Species LX. *Fig.* 60.

Si radices ſint ſigni diverſi, Conchois & Parabola ad diverſas ordinatæ primæ partes jacebunt: Quæ eſt Species ſexageſima.

PROP. XVIII. THEOR.

Vid. Fig. 61, 62, 63, 64.

ÆQuatio $xy^2 - ey = * * cx + d$ deſignat Figuram habentem ſex crura Hyperbolica ad tres Aſymptotos, quarum duæ ſunt Abſciſſæ parallelæ, jacentia.

Reducatur y in ſeriem $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. eo citius convergentem, quo minor eſt x: Unde (per *Cor.* 2. *Prop.* 7.) ordinata prima eſt Aſymptotos habens duo crura ad diverſas ejus partes jacentia, & in plagas oppoſitas progredientia. Abſciſſa x ad utraſque partes in infinitum augeri poteſt, & ordinata nunquam evadet impoſſibilis. Reducatur y in ſeriem eo citius convergentem quo major eſt x, $\pm\sqrt{c} + \frac{\pm d + e\sqrt{c}}{2x\sqrt{c}}$ &c. Unde (per *Prop.* 6.) $\pm\sqrt{c}$ eſt ordinata Aſymptoti ad Abſciſſam x pertinens. Sume igitur in ordinatâ primâ duas rectas hinc inde æquales $\sqrt{c}$, & rectæ ductæ per earum extremitates Abſciſſæ parallelæ, erunt duæ Aſymptoti.

Coroll. 1. Si $d+e\surd c$ ſit quantitas affirmativa, Aſymptotos dg jacet inter ejus crus & Abſciſſam; ſin negativa contrarium accidit.

Coroll. 2. Crura adjacentia Aſymptotos dg, $\delta\gamma$ ſemper jacent ad diverſas earum partes: Nam ſi ſignum Abſciſſæ mutetur, quantitatis $dt+e\surd c$ ſignum mutabitur.

Coroll. 3. Curva non decuſſat Aſymptotos dg, $\delta\gamma$ (per *Coroll.* 6. *Prop.* 4.)

Coroll. 4. Eodem modo oſtenditur, quo in *Coroll.* 1. quod ſi ſit $d-e\surd c$ quantitas affirmativa, Aſymptotos $\delta\gamma$ jacet inter crus & Abſciſſam.

Coroll. 5. Ergo ſi $d+e\surd c$, $d-e\surd c$ ſint quantitates ejuſdem ſigni, Aſymptoton dg, $\delta\gamma$ extremitates unæ ad eandem plagam tendentes jacent extra crura, & reliquæ intra.

Coroll. 6. Si $d+e\surd c$, $d-e\surd c$ ſint ſigni contrarii, Aſymptoton dg, $\delta\gamma$ extremitates ad plagas oppoſitas ductæ jacebunt intra crura, reliquæ extra.

Coroll. 7. Crura adjacentia Aſymptoton $d\delta$, jacent ad eaſdem vel diverſas ejus partes, prout abeſt vel adeſt terminus ey.

Coroll. 8. Si deſit terminus ey, extremitates unæ Aſymptoton in eandem plagam extenſæ jacent intra crura, reliquæ extra.

Coroll. 9. Si terminus cx ſit negativus; Figura habet duo tantum crura ad ordinatæ primæ eaſdem vel contrarias partes jacentia, prout abeſt vel adeſt terminus ey.

Enume-

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - ey = cx + d$.

Species LXI. *Fig.* 61.

Si æquationis $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$, radices sint reales, eæ necessario habebent eadem signa, & erunt inæquales: atque Figura constabit ex tribus Hyperbolis, Inscriptâ ad *d*, Ambigenâ ad *δ*, cum tertiâ intra Asymptotos parallelas: Quæ est Species sexagesima prima.

Species LXII, LXIII. *Fig.* 62, 63.

Si æquationis illius radices sint imaginariæ, habebitur Anguinea intra Asymptotos parallelas, cum duabus Inscriptis: si Anguinea transit per centrum (*fig.* 63.) Species est sexagesima secunda; si non transeat per centrum (*fig.* 62.) Species est sexagesima tertia.

Species LXIV. *Fig.* 64

Si desit terminns *ey*, Figura constat ex Hyperbolâ intra Asymptotos parallelas, cum duabus Inscriptis: Quæ est Species sexagesima quarta.

Species LXV, LXVI. *Fig.* 65, 66.

Si æquationis $xy^2 + ey = cx + d$, terminus cx sit negativus; Figura constat ex Anguineâ pura: si Anguinea illa transit per centrum, Species est sexagesima quinta; at si non transit per centrum, Species est sexagesima sexta.

Species LXVII. *Fig.* 67.

Si desit terminus ey, æquatio $xy^2 = -cx + d$, designat Conchoidem puram: Quæ est Species sexagesima septima.

PROP. XIX. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = * * * + d$ *designat Figuram habentem quatuor crura.*

Vide *Fig.* 68. ubi $AB = x$, $BC = y$, invenietur $y = \frac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{dx + \frac{1}{4}ee}}{x}$, id est per methodum serierum, $y = \frac{e}{x} + \frac{d}{e} +$ &c. Unde Ordinata prima AG est Asymptotos habens duo crura adjacentia. Augeatur jam x perpetuo, & y non evadet impossibilis; quare curva habet alia duo crura: quod si mutetur signum ipsius x, evadet y tandem imaginaria; adeoque curva ad illas plagas in infinitum non pergit. Quoniam vero augendo x, y perpetuo diminuitur, patet Abscissam esse alteram Asymptoton habentem duo crura ad diversas ejus partes jacentia, in plagam eandem protensa. Q. E. D.

Coroll. Abscissa non secat curvam; nam (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) tria intersectionis puncta abeunt in infinitum.

Spe-

Species LXVIII. *Fig.* 68.

Si adſit terminus *ey*, Figura conſtat ex duabus Hyperbolis, Inſcriptâ & Abigenâ: Quæ eſt Species ſexageſima octava.

Species LXIX. *Fig.* 69.

At ſi deſit terminus *ey*, Figura conſtat ex duabus Inſcriptis in angulis Aſymptoton deinceps jacentibus: Quæ eſt Species ſexageſima nona.

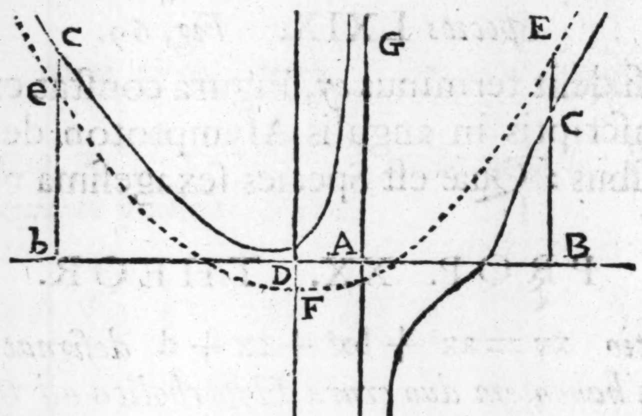
PROP. XX. THEOR.

Æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *deſignat Figuram habentem duo crura Hyperbolica ad Ordinatam primam jacentia, & duo Parabolica quæ pro Aſymptoto habent Parabolam Conicam.*

SIT Abſciſſa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. Eſt $y = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$, ſit x infinite parva, & erit $y = \frac{d}{x}$, igitur (per *Coroll.* 2. *Prop.* 16.) Ordinata prima habet duo crura ad diverſas ejus partes jacentia, & in plagas oppoſitas progredientia. Augeatur jam x tam verſus dextram quam ſiniſtram in infinitum, & valor ipſius y ſemper erit affirmativus, & etiam ſine limite increſcet. Sumatur $BE = ax^2 + bx + c$, eritque (per *Prop.* 6.) locus omnium E Aſymptotos curvæ, quæ quidem eſt Parabola Conica. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1. Hæc Figura nunquam decuſſat ejus Aſymptoton *AG*. Nam tria interſections puncta abeunt in infinitum. Adeoque crura Hyperbolica & Parabolica ad eaſdem partes rectæ



AG jacentia ſemper copulantur: Et proinde hujus Figuræ Species tantum eſt unica, quæ eſt ſeptuageſima.

Coroll. 2. Parabola Conica nunquam decuſſat hanc curvam; ſecet enim, ſi fieri poſſit, & erit $EC = 0$, adeoque etiam $d = 0$, quod fieri nequit.

Coroll. 3. Sit $AD = -\frac{b}{2a}$, ordinata $DF = \frac{4ac - bb}{4a}$: Vertice *F*, Diametro *DF*, & latere recto $\frac{1}{a}$ deſcripta Parabola eſt Aſymptotos curvæ.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

Æquatio $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *designat figuram habentem duo crura Parabolica in oppositas plagas errantia.* Vide fig. 70.

AUgeatur x in infinitum, & simul augebuntur ordinatæ y duo valores hinc inde æquales, ergo curva habet duo crura infinita. At si mutetur signum Abscissæ, terminus ax^3 evadet negativus: & proinde datur certus limes, ultra quem x in illas plagas non pergit. Reducendo y in seriem patebit crura esse Parabolica. Q. E. D.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Species LXXI. *Fig.* 70, 71.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ radices omnes sint reales & inæquales, Parabola habet Ovalem ad verticem: Quæ est Species septuagesima prima.

Species LXXII, LXXIII. *Fig.* 73, 74.

Si radices duæ æquentur, Figura vel prodit Nodata (*fig.* 23.) quæ est Species septuagesima secunda; vel Punctata (*fig.* 74.) quæ est Species septuagesima tertia.

Species LXXIV. *Fig.* 75.

Si tres radices æquentur, Figura erit Cuspidata, quæ est Species septuagesima quarta.

Est qu

Estque hæc Figura Asymptotos Parabolarum quam designat æquatio $yy=ax^3+bxx+cx+d$.

Species LXXV. *Fig.* 73, 74.

Si radices duæ sint impossibiles, Figura erit pura Campaniformis, Speciem constituens septuagesimam quintam.

Species LXXVI. *Fig.* 77.

In quarto casu æquatio erat $y=ax^3+bx^2$ $cx+d$: quæ (per *Prop.* 8.) designat Figuram habentem crura contraria, quæ *Cubica* Parabola dici solet. Et sic Species omnino sunt septuaginta sex.

Lineæ tertii ordinis inter se formâ haud parum differunt, scilicet ut Ellipsis à circulo, vel Hyperbola æquilatera à reliquis.

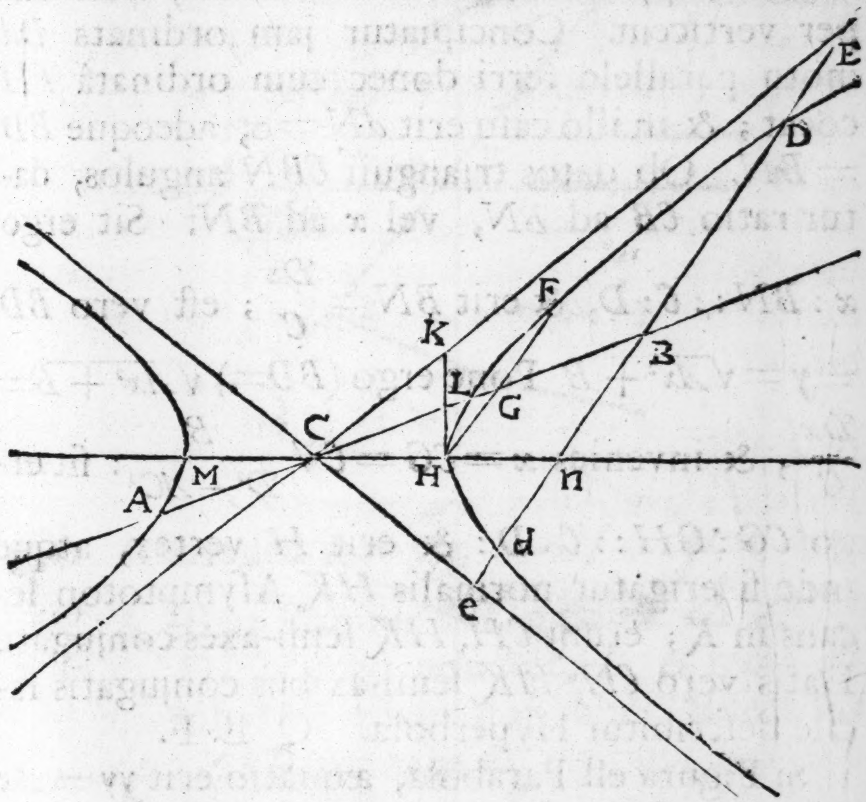
Sed & aliquando vertices Figurarum quas concavas descripsimus, formam Cuspidis induunt: at Cuspides istiusmodi non componuntur ex Nodis infinite parvis, nec unquam prodeunt admodum acuti.

Determinatio Locorum Geometricorum.

Postquam Species omnes Linearum alicujus ordinis enumerantur, convenit ut dignoscatur Species quam constituit Linea particularis æquatione quâlibet propositâ denotata. Innumeræ enim æquationes, quoad formam multum inter se discrepantes, eandem Lineam desig-

deſignare poſſunt. Lineæ quæ excurrunt in infinitum ex Aſymptotis ſuis optime determinantur; Ovales vero ex Diametris.

Sit $y^2 + Axy + By + Cx^2 + Dx + E = 0$ æquatio univerſalis ad Coni ſectiones. Hæc æquatio (per *Prop.* 10.) facillime convertetur in hanc



$yy = Ax^2 + Bx + C$. Et Figura erit Hyperbola, Parabola aut Ellipſis prout terminus Ax^2 affirmativus eſt, nullus aut negativus.

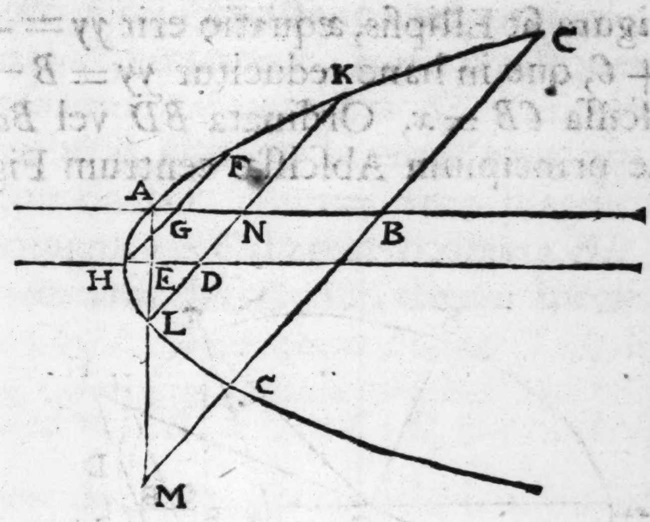
In primo caſu quando, Figura eſt Hyperbola, ſumendo Abſciſſam novam $= x + \frac{B}{2A}$ æquatio induet hanc formam $yy = Ax^2 + B$. Sit jam *CB*

Abſciſſa $= x$, Ordinata $BD = y$; & erit principium Abſciſſæ C centrum Hyperbolæ. Sume in ordinatâ BD; BE, Be hinc inde æquales x, & (per *Prop.* 6.) erunt CE, Ce duæ Aſymptoti: ducatur CHN biſecans angulum Aſymptoton, & erit CN axis. Sit H vertex Figuræ, HGF ordinatim applicata ad Diametrum CB, tranſiens per verticem. Concipiatur jam ordinata Dd motu parallelo ferri donec cum ordinatâ FH coeat; & in illo caſu erit $dN = 0$, adeoque $BD = BN$. Ob datos trianguli CBN angulos, datur ratio CB ad BN, vel x ad BN. Sit ergo $x : BN :: C : D$, & erit $BN = \frac{Dx}{C}$; eſt vero $BD = y = \sqrt{Ax^2 + B}$ Pone ergo ($BD =$) $\sqrt{Ax^2 + B} = \frac{Dx}{C}$, & invenies $x = CG = C\sqrt{\frac{B}{D^2 - AC^2}}$: ſit ergo $CG : GH :: C : D$: & erit H vertex, atque inde ſi erigatur normalis HK Aſymptoton ſecans in K; erunt CH, HK ſemi-axes conjugati. Datis vero CH, HK ſemi-axibus conjugatis facile deſcribitur Hyperbola. Q. E. F.

Si Figura eſt Parabola, æquatio erit $yy = Ax + B$, vel ſumendo principium Abſciſſæ in curvâ, $yy = Ax$. Sit Abſciſſa $AB = x$, ordinata BC vel $Bc = y$. Per A duc ALM perpendicularem ad Abſciſſam: ſecat ea curvam in L, ordinatam vero Cc in M. Sit $LDNK$ ordinata Abſciſſam in N ſecans. Moveatur ordinata BC motu parallelo donec coincidat cum LDK, & in illo caſu erit $Mc = 0$, & proinde $BM = BC = y$.

Ob-

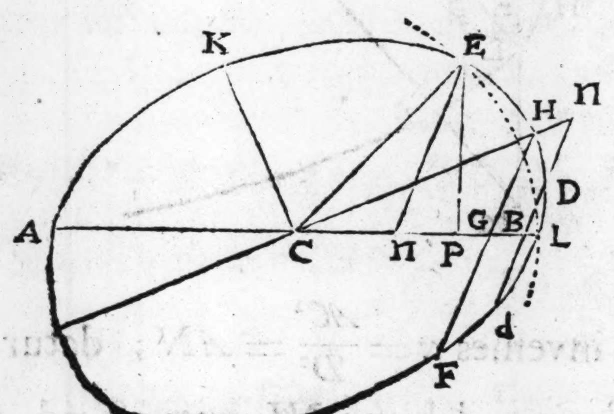
Ob datos trianguli *ABM* angulos datur ratio *AB* ad *BM*, vel x ad *BM*; sit igitur $x : BM ::$ $C : D$, & erit $BM = \frac{Dx}{C}$. Pone ergo $\frac{Dx}{C} = y =$



$\sqrt{Ax}$, & invenies $x = \frac{AC^2}{D^2} = AN$; datur ergo *AN*, & etiam dabitur *NL* quæ est ad *AN* ut *D* ad *C*. Datur ergo punctum *L*, & recta *AL* tam magnitudine quam positione. Biseca *AL* in *E* & sit *HED* normalis ad medium ejus punctum *E*, & erit *HE* axis. Sit vertex *H*, *HGF* ordinata ad Diametrum *AB* transiens per *H*, & in illo casu erit $y = GH$, est vero *GH* data quantitas: & erit $x = \frac{GH^2}{A} = AG$. Datur ergo punctum *G*; per quod punctum si ducatur ordinata *GH* æqualis datæ rectæ *DN*, dabitur vertex *H*, & recta *HE*; est vero latus rectum

principale æquale $\frac{AE^2}{HE}$, quod exinde dabitur. Datis jam axe HE, vertice H & latero recto $\frac{AE^2}{HE}$ describi potest Parabola. Q. E. F.

Si Figura sit Ellipsis, æquatio erit $yy = -Ax^2 + Bx + C$, que in hanc reducitur $yy = B - Ax^2$. Sit Abscissa $CB = x$, Ordinata BD vel $Bd = y$. Eritque principium Abscissæ centrum Figuræ.



Secet curvam in L, & erit $CL = \sqrt{\frac{B}{A}}$: centro C radio CL describe circulum LE Ellipsin secantem in E: sitque EN ordinata; EP perpendicularis in Abscissam; & dabitur specie triangulum NPE. Sit ergo $NE : EP :: C : D$, id est $y : EP :: C : D$, unde $EP = \frac{Dy}{C}$, $PN = \frac{C}{y} \times \sqrt{C^2 - DD}$; est vero per naturam curvæ CN $= \sqrt{}$

$= \sqrt{\frac{B-yy}{A}}$, adeoque tota $CP = \frac{y}{C}\sqrt{C^2-DD} + \sqrt{\frac{B-yy}{A}}$; & eſt $CE = \sqrt{\frac{B}{A}}$ adeoque æquatio $CE^2 = CP^2 + PE^2$ dabit y vel EN; & inde invenietur EN Abſciſſa correſpondens; atque adeo datur punctum E, & per conſequens recta CE poſitione. Duc rectas KC, CH biſecantes angulos ACE, ECL; & hi erunt axes, qui itaque poſitione dantur. Eorum vero magnitudo ſic determinantur: Occurrat ordinata BD axi in N, & ducatur HGF. Ob datum ſpecie triangulum CGH, datur ratio CG ad GH, ſit ergo $CH : GH$ vel $CB : BN :: C : D$, & erit $BN = \frac{Dx}{C}$. Sed cum ordinata BD coincidit cum GH, evadit BN æqualis $GH = y = \frac{Dx}{C}$; in æquatione ſubſtituendo illum ipſius valorem, erit $\frac{D^2x^2}{C^2} = B - Ax^2$, unde $x = CG = C\sqrt{\frac{B}{D^2+AC^2}}$; adeoque dabitur ordinata GH; & punctum H, atque inde dabitur CH magnitudine. Et eodem modo invenire licet axem minorem.

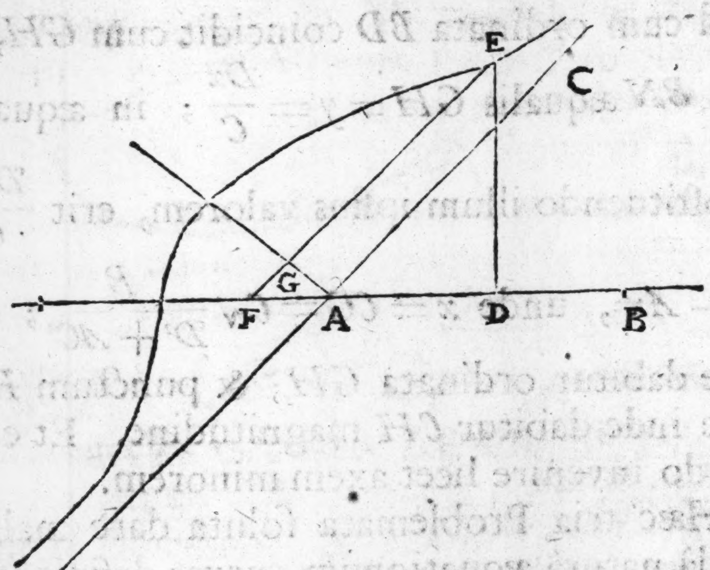
Hæc tria Problemata ſoluta dare malui ex nudâ naturâ æquationum curvas definientium; quam per quaſdam *Apollonii* Propoſitiones more veterum Geometrarum: Hoc modo enim melius innoteſcit analogia inter Loca ſecundi ordinis & Loca tertii & ſuperiorum ordinum.

Pro-

Proprietates Sectionum Conicarum à Geometris hactenus traditæ sufficiunt ad determinanda Loca quæ incidunt in Sectiones Coni: Consimiles vero Linearum superiorum ordinum proprietates traditas nondum habemus. Quâ ratione vero invenire licet quam Speciem constituit Linea tertii ordinis æquatione quâlibet designata, ex Propositione decimâ quintâ constare potest: quod per sequentia plenius adhuc constabit.

Exemplum Primum.

OPorteat invenire quam speciem constituit Linea æquatione $y^3 + x^3 = a^3$ designata, ubi ordinatæ insistunt abscissâ ad angulos rectos.



Mutetur signum Abscissæ & æquatio evadet $y^3 = x^3 + a^3$; & inde (per Theorema *Neutoni*) $y = x + \frac{aaa}{3x^2} + \&c.$ Sit Abscissa *AB*, duc rectam

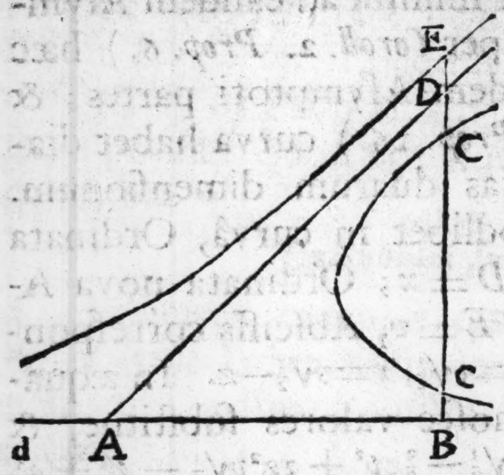
AC

AC per initium Abſciſſæ, quæ cum Abſciſſâ angulum ſemirectum contineat, & (per *Prop.* 6.) erit *AC* Aſymptotos. Et quoniam unica tantum iſtiuſmodi ſeries obtineri poteſt, curva habet niſi duo crura infinita ad eandem Aſymptoton jacentia, & (per *Coroll.* 2. *Prop.* 6.) hæc crura jacent ad eaſdem Aſymptoti partes; & inde (per *Coroll.* 7. *Prop.* 16.) curva habet diametrum ad ordinatas duarum dimenſionum. Sit *E* punctum quodlibet in curvâ, Ordinata $ED = y$, Abſciſſa $AD = x$; Ordinata nova Aſymptoto parallela $FE = v$, Abſciſſa correſpondens $AF = z$; erit $y = v\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x = v\sqrt{\frac{1}{2}} - z$. In æquatione $y^3 = x^3 + a^3$, hoſce valores ſubſtitue, & proveniet $\frac{1}{2}v^3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}v^3\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}zv^2 + 3z^2v\sqrt{\frac{1}{2}} - z^3 + a^3$, vel $3zv^2 - 6z^2v\sqrt{\frac{1}{2}} = 2a^3 - 2z^3$. Unde (per *Prop.* 10.) $z\sqrt{\frac{1}{2}}$ eſt ordinata Lineæ biſecantis ordinatas v ad curvam terminatas: Duc igitur rectam *AG* per principium Abſciſſæ Aſymptoton ſecantem ad rectos angulos; & illa erit recta biſecans ordinatas. Occurrat ea ordinatæ *EF* in *G*; & ſit Abſciſſa nova $AG = x$, ordinata Correſpondens $EG = y$. Erit $z = x\sqrt{2}$, $v = y + x$; in æquatione $3zv^2 - 6z^2v\sqrt{\frac{1}{2}} = 2a^3 - 2z^3$ hoſce valores pro z, v ſubſtitue, & orietur $3xy^2\sqrt{2} = 2a^3 - x^3\sqrt{2}$, vel ponendo $a = c\sqrt{2}$, $3xy^2\sqrt{2} = 4c^3\sqrt{2} - x^3\sqrt{2}$, & dividendo per $\sqrt{2}$, $3xy^2 = 4c^3 - x^3$: Cumque æquatio hæc ſit ejuſdem formæ cum hâc $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ubi deeſt terminus ey, & ax^3 eſt negativus, & præterea æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d$ radices duæ ſunt impoſſibiles, Figura conſtituit Speciem quinquageſimam nonam. Q. E. I.

Exem-

Exemplum Secundum.

OPorteat invenire quam ſpeciem conſtituit Linea æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$ deſignata, ubi ordinatæ inſiſtunt abſciſſæ ad angulos rectos: hujus æquationis tres radices ſeu valores ipſius y reductæ in ſeries eo citius convergentes quo major eſt abſciſſa x ſunt



$$x + \frac{\sqrt{ax}}{aa} - \frac{a^3}{2x^2} \text{ \&c.}$$

$$x - \frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{2a^6}{x^5} + \frac{7a^9}{x^8} + \text{\&c.}$$

Sit Abſciſſa $AB = x$, Ordinata rectangula $BcC\gamma$: in illâ ordinatâ ſit $BD = AB$, junge AD, & (per *Prop.* 6.) erit illa Aſymptotos, quæ pro duabus Aſymptotos coeuntibus habenda eſt; ſiquidem duo termini priorum ſerierum coincidunt: Unde hæc Linea vel conſtituit ſpeciem ſexageſimam octavam vel ſexageſimam nonam, nam hæ duæ ſpecies ſolæ ſunt Linearum tertii ordinis quæ habent Aſymptotos duas coincidentes. Series tertia $\frac{a^3}{x^3} + \frac{2a^6}{x^5} + \frac{7a^9}{x^8} + \text{\&c.}$ indicat Abſciſſam eſſe Aſymptoton habentem duo crura ad oppoſitas plagas protenſa & ad eaſdem ejus partes jacentia, quoniam mutando ſignum abſciſſæ terminus $\frac{a^3}{x^2}$, manet affirmativus. Et quoniam in extremitate Aſymptoti AD ad diſtantiam infinitam ſitâ jacet punctum curvæ duplex; Aſymptotos illa habet crura ſua ad diverſas ejus partes jacentia, & in plagas eaſdem protenſa. Unde facile videre eſt hanc curvam conſtituere Speciem ſexageſimam nonam: Habetque Aſymptoton AD pro Diametro ad ordinatas duarum dimenſionum, quæ parallelæ ſunt Aſymptoto AB. Q.E.I.

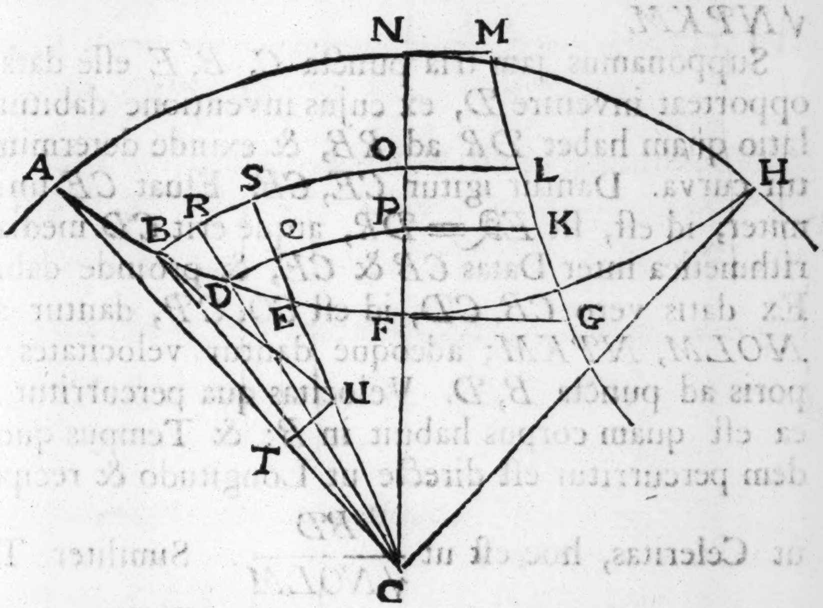
In-

Inventio Lineæ celerrimi deſcenſus in quacunque hypotheſi gravitatis.

PROBLEMA.

Invenire Lineam celerrimi deſcenſûs, datâ lege vis Centripetæ.

SIT *C* centrum virium, *ADFH* linea quæſita, *A* punctum de quo corpus cadere debet, *B,D,E* tria puncta, quorum diſtantiæ ſunt quam minimæ; junge *CB, CD, CE*: Centro *C* & radiis *CB, CD*, deſcribe circulos *BO, DP*, quorum hic ſecet *CN*



(axem curvæ) & *CE* in *P*, *Q* reſpective: ille vero rectas *CD, CE* in *R, S*; axem vero in *O*.

Sit *MLKG* linea cujus Ordinatæ *NM*, *OL*, *PK*, *FG*, insistentes Abscissâ *GN* normaliter proportionales sunt vi centripetæ in punctis *N*, *O*, *P*, *F*, respectivè. Cadat jam Corpus à puncto *N*, versùs centrum vi solâ centripetâ agitatum, & (per Prop. 39. Lib. 1. *Princip. Newtoni*) ejus velocitas in puncto quovis *O* erit ut areæ *NOLM* latus quadratum.

Jaceant puncta *A*, *N* in circumferentiâ Circuli cujus centrum *C*, & velocitates corporum in curvâ *AB* & recta *NC* motorum in omnibus æqualibus à centro *C* distantiis erunt æquales. Nam (per Prop. 40. Lib. 1. *Newtoni*) si eorum velocitates in aliquâ æquali altitudine sint æquales, in omni æquali altitudine æquales erunt: at corporum istorum velocitates in punctis *A*, *N*, erant æquales, quippe nullæ; ergo & in omnibus distantiis æqualibus æquales erunt. Igitur velocitas corporis in curva *ABF* moti, per Areæ curvi lineæ *MLG* latus quadratum rite repræsentabitur: scilicet velocitas in *B* est ut $\sqrt{NOLM}$, velocitas in *D* est ut $\sqrt{NPKM}$.

Supponamus jam tria puncta *C*, *B*, *E* essè data, & opporteat invenire *D*, ex cujus inventione dabitur relatio quam habet *DR* ad *RB*, & exinde determinabitur curva. Dantur igitur *CE*, *CB*. Fluat *CE* uniformiter, id est, sit $EQ = DR$, atque erit *CD* media Arithmetica inter Datas *CB* & *CE*, & proinde dabitur. Ex datis vero *CB*, *CD*, id est *CO*, *CP*, dantur areæ *NOLM*, *NPKM*; adeoque dantur velocitates corporis ad puncta *B*, *D*. Velocitas qua percurritur *BD* ea est quam corpus habuit in *B*; & Tempus quo eadem percurritur est directe ut Longitudo & reciproce ut Celeritas, hoc est ut $\frac{BD}{\sqrt{NOLM}}$. Similiter Tempus quo percurritur *DE* est ut $\frac{DE}{\sqrt{NPKM}}$; & inde

Tempus

Tempus quo percurritur BE eſt ut $\frac{BD}{\sqrt{NOLM}} + \frac{DE}{\sqrt{NPKM}}$: ſed quia tempus quo tota curva percurritur ſupponitur breviſſimum, erit tempus per quamlibet ejus partem etiam breviſſimum. Et proinde fluxio quantitatis huic tempori proportionalis æqualis nihil.

Hiſce præmiſſis, ſit $CD = CP = x$, $DR = PO = \dot{x}$, $BR = \dot{y}$, $DQ = \dot{z}$, erit $BD = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $DE = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$: hiſce valoribus pro BD, DE ſubſtitutis, erit $\sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{NOLM}} + \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}{NPKM}}$ quantitas tempori proportionalis, adeoque ejus fluxio $= 0$, hoc eſt,

$$\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{NOLM}} + \frac{\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{NPKM}} = 0;$$ nam $\dot{x}$ & areæ $NOLM$, $NPKM$ ſunt quantitates non fluentes. Ob data tria puncta C, B, E; datur BS (normalis à vertice Trianguli CBE in baſin CE Demiſſa) $= BR + RS = BR + DQ = \dot{y} + \dot{z}$, adeoque $\dot{y} + \dot{z}$ eſt data quantitas, & ejus fluxio $\ddot{y} + \ddot{z} = 0$, vel $\ddot{z} = -\ddot{y}$. In æquatione $\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{NOLM}} = \frac{-\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{NPKM}}$ pro $\ddot{z}$ pone ejus valorem

$-\ddot{y}$ & divide æquationem per $\ddot{y}$ atque erit

$$\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}\sqrt{NPHM}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}}.$$

Cumque hoc universaliter in omnibus curvæ punctis obtineat, patet esse $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}}$ datam quantitatem, vel $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}}=\frac{1}{A}$ (ubi A est data quantitas) & $A\dot{y}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$: quæ æquatio determinat curvam. Q. E. I.

Coroll. 1. Est $A^2=NFGM$. nam cum recta CB vel x coincidit cum CF, ea est normalis in curvam & $\dot{x}=0$, atque area $NOLM$ evadit $=$ areæ $NFGM$. In æquatione igitur $A\dot{y}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$ evanescat $\dot{x}$ & sit $NOLM=NFGM$, atque erit $A\dot{y}=\sqrt{\dot{y}^2}\sqrt{NFGM}$, id est, $A\dot{y}=\dot{y}\sqrt{NFGM}$ & dividendo per $\dot{y}$, $A=\sqrt{NFGM}$. Q. E. D.

Coroll. 2. $BD:BR$ ut velocitas maxima quam corpus in motu per curvam AF acquirit ad ejus velocitatem in puncto B. Nam est $A\dot{y}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$, vel $\sqrt{NFGM}\times\dot{y}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{NOLM}$, adeoq; $BD:BR::\sqrt{NFGM}:\sqrt{NOLM}$; hoc est, ut velocitas maxima ad velocitatem in puncto B.

Coroll.

Coroll. 3. $BR : RD :: \surd NOLM : \surd FOLG$.

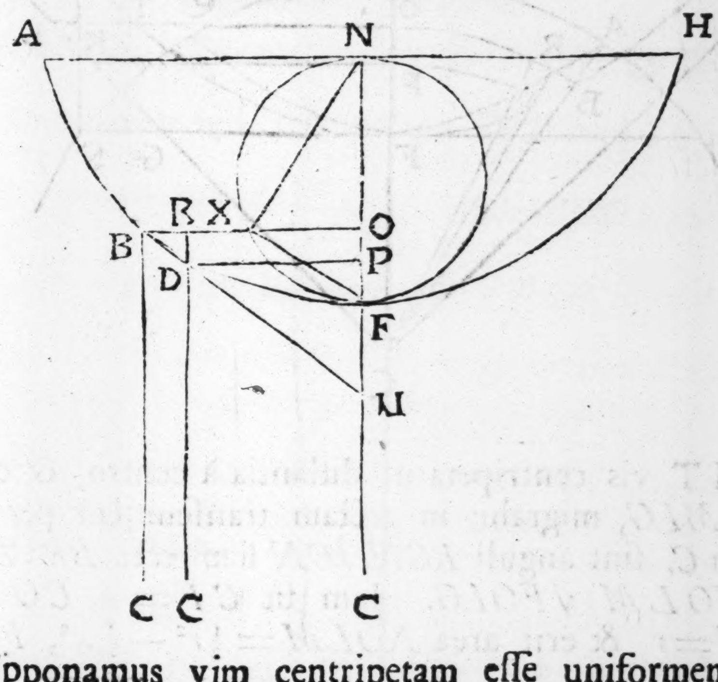
Coroll. 4. Si sint A, H, puncta curvæ altissima, & ducantur CA, CH, hæ tangent curvam in punctis A, H.

Coroll. 5. Igitur in nulla hypothesi gravitatis Recta linea est via celerrimi descensus; præterquam ubi corpus descendens directe tendit ad centrum.

Coroll. 6. Sit BT longitudinis cujusvis, & $BT : TU :: \surd FOLG : \surd NOLM$: sit vero TU in TB normalis, junge BU, & illa Tanget curvam in puncto B. Nam $DR : BR : \surd FOLG : \surd NOLM$, ergo $DR : BR :: BT : TU$; & proinde BU tangit curvam ad punctum B. Q. E. D.

Proprietates hucusque traditæ sunt generales, Lineæ celerrimi descensûs in omni hypothesi gravitatis universaliter competentes. Descendamus jam ad casus particulares.

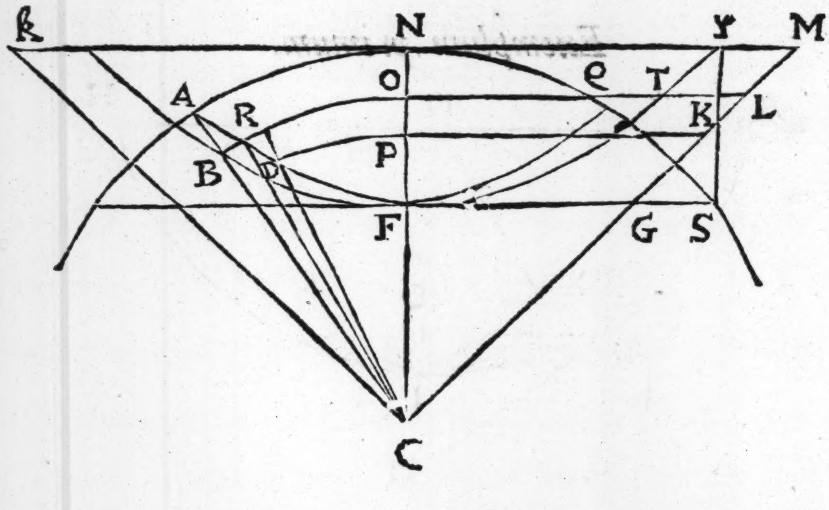
Exemplum primum.



SUpponamus vim centripetam esse uniformem & agere in parallelis: quo in casu punctum C abit in infinitum,

infinitum, existentibus *CF*, *CD*, *CB* parallelis. Peripheriæ *AN*, *BO*, *DP* & curva *MG* migrant in rectas, & area *NOLM* in rectangulum, atque area *NOLM* ad aream *NFGM* ut *NO* ad *NF*. & inde $BD : BR :: \sqrt{NF} : \sqrt{NO}$. Supra diametrum *NF* describe circulum *NXF* secantem ordinatam *BO* in *X*, junge *NX*, *FX*, & *BU* sit tangens ad *B*. Propter similia Triangula *NXF*, *NXO*, *FXO*. $NF : NX :: NX : NO$. ergo $\sqrt{NF} : \sqrt{NO} :: NF : NX$. & $NF : NX :: FX :: XO$. unde $DB : BR :: FX : XO$. duc tangentem *BU*, & erit $BD : BR :: BU : BO$, adeoque $BU : BO :: XF : XO$. ergo tangens *BU* semper parallela est Chordæ *XF* quæ est notissima proprietas Cycloidis vulgaris.

Exemplum secundum.



SIT vis centripeta ut distantia à centro, & curva *MLG*, migrabit in rectam transeuntem per centrum *C*. sint anguli *KCN*, *kCN* semirecti. $BR : DR :: \sqrt{NOLM} : \sqrt{FOLG}$. Jam sit $CF = a$, $CO = x$, $CN = r$, & erit area $NOLM = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} x^2$, $FOLG = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} a^2$, unde $\dot{x} : \dot{y} :: \sqrt{x^2 - a^2}\ \sqrt{r^2 - x^2}$. Describatur

ſcribatur Hyperbola *FTr*, vertice *F* & Aſſymtotis *CK*, *Ck*. Occurrat *OL* Hyperbolæ in *T*, & circulo in *Q*; atque erit per hujus Hyperbolæ & circuli naturam $OT = \sqrt{x^2 - a^2}$, $OQ = \sqrt{rr - xx}$. ergo *DR* : *BR* :: *OT* : *OQ*.

Hujus Curvæ Rectificatio, per quadrat. Hyperb.

Patet *BD* : *DR* :: *FS* : *OT*. hoc eſt, incrementum curvæ ad incrementum Axis *OP* ut data recta *FS* ad Hyperbolæ ordinatam reſpectivam *OT*. Erit igitur componendo, ut omnes *BD* ad omnes *OP* ita totidem *FS* ad totidem ordinatas Hyperbolæ. Hoc eſt ut curva *AF* ad axem ejus *NF*, ita rectangulum *NFSr* ad aream Hyperbolicam *NFTr*. Etenim area illa *NFTr* eſt ſumma ordinatarum *OT*.

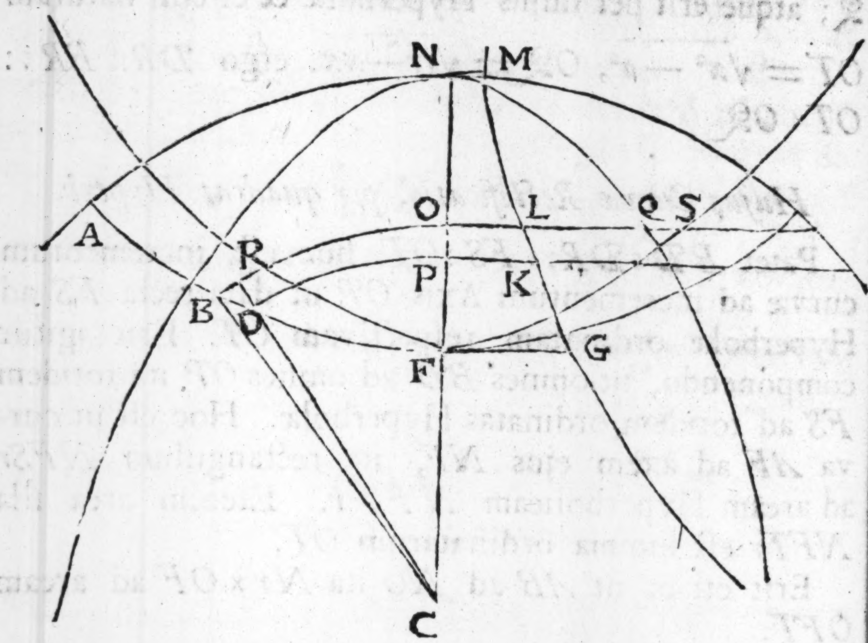
Erit etiam ut *AB* ad *NO* ita $Nr \times OF$ ad aream *OFT*.

Hujus Curvæ Quadratura per quad. Hyp. & Circ.

Fluxio areæ, ſcil. triangulum $CBD = \frac{1}{2} CB \times BR = \frac{1}{2} x \times \dot{y} = \frac{1}{2} \dot{x} x \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{x^2 - a^2}}$. Unde $CBD : \frac{1}{2} x \dot{x} :: \sqrt{r^2 - x^2} : \sqrt{x^2 - a^2}$, Eſt vero *CBD* fluxio areæ *CFB*, & $\frac{1}{2} x \dot{x}$, fluxio quantitatis $\frac{1}{4} x^2$, ergo ut area *CFB* ad $\frac{1}{4} xx$ ita omnes $\sqrt{r^2 - x^2}$ ad omnes $\sqrt{x^2 - a^2}$; hoc eſt $CFB : \frac{1}{4} xx ::$ area *FOQS* : aream *FOT*. Coincidat jam *CB* cum *CF* & evaneſcet area *CFB*, at evadet $\frac{1}{4} xx = \frac{1}{4} CF^2 = \frac{1}{4} aa$. Igitur ſtatim apparet $\frac{1}{4} xx$ fluentem quantitatis $\frac{1}{2} x \dot{x}$ minui debere quantitate $\frac{1}{4} aa$, & proinde erit vere $CFB : \frac{1}{4} xx - \frac{1}{4} aa ::$ *FOQS* : *FOT*. & Area $ABC : \frac{1}{4} xx - \frac{1}{4} aa :: NOQ : NOTr$. atque area tota $CFA : \frac{1}{4} rr - \frac{1}{4} aa :: NSF : NrF$.

Exem-

Exemplum tertium.



SIT vis centripeta reciproce ut quadratum diſtantiæ à centro; & erit ordinata $OL=\frac{1}{xx}$, adeoq; per notas quadrandi methodos $FOLG=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}$, *NOLM* $=\frac{1}{x}-\frac{1}{r}$; & inde $BR^2 : RD^2 :: \frac{1}{x}-\frac{1}{r} : \frac{1}{a}-\frac{1}{x}$ $:: \dot{y}^2 : \dot{x}^2$, vel, quod idem eſt, $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx-ra : ra-ax$, & $\dot{x} : \dot{y} : \sqrt{rx-ra} : \sqrt{ra-ax}$. Igitur latere recto *r*, axe *FN*, vertice *F* deſcribe Parabolam *FS*; item latere recto *a* axe *NF*, vertice *N* deſcribe Parabolam *NQ*: occurrat ordinata *OL* Parabolis hiſce in *Q*, *S*; & erit $\dot{x} : \dot{y}$ vel *DR* : *BR* : : *OS* : *OQ*. Nam eſt $OS=\sqrt{rx-ra}$, & $OQ=\sqrt{ra-ax}$.

Hujus

Hujus curvæ rectificatio.

Quoniam $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx - ra : ra - ax$, erit $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 : \dot{x}^2 :: rx - ax : rx - ra$; & inde $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} : \dot{x} :: \sqrt{rx - ax} : \sqrt{rx - ra} :: BD : DR$, hoc est, ut fluxio curvæ ad fluxionem Abscissæ: & componendo, erit ut summa omnium $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ad omnes $\dot{x}$, ita omnes $\sqrt{rx - ax}$ ad tot $\sqrt{rx - ra}$, hoc est, $BF : FO :: x\sqrt{rx - ax} - a\sqrt{ar - aa} : \overline{x - a}\sqrt{rx - ra}$ (nam $x\sqrt{rx - ax}$ fluens fluxionis $\dot{x}\sqrt{rx - ax}$ minuenda est quantitate $a\sqrt{ar - aa}$.)

Curva hæc perfecte quadrabilis est, nam $\dot{x} : \dot{y} :: \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$, ergo $x\dot{x} : x\dot{y} :: \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$; hoc est, $x\dot{x} : 2CBD$ vel $\frac{1}{2}x\dot{x} : CBD :: \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$. Et sumendo summas omnium, erit $\frac{1}{4}xx : CFB :: \overline{x - a}\sqrt{rx - ra} : \overline{ra}\sqrt{ra - ax} - \overline{r - x}\sqrt{ra - ax}$. Et erit tota area CFA (comprehensa rectis CF, CA & curva AF) ad $\frac{1}{4}CN^2$ ut $\sqrt{CN^2 - CN \times CF}$ ad $\sqrt{CN \times CF - CF^2}$.

Hæ sunt tres insigniores Hypotheses Gravitatis, etenim si praxin spectemus, tuto supponi potest uniformis, & agere in parallelis, at in rigore geometrico, hypotheses duæ ultimæ in rerum natura locum vere habent. Nam in terræ cavernis gravitas est ut distantiæ corporis à centro Terræ, & in Turrium vel montium cacuminibus ea est reciproce in duplicata ratione distantiæ, ut constat ex principiis *Newtoni.*

Data Linea Celerrimi descensus, invenire legem vis Centripetæ.

Æquatio definiens curvam, AFH (fig. 1.) est $A\dot y = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,\sqrt{NOLM}$. ubi $CO = CB = x$, $DR = OP = \dot x$, $BR = \dot y$, $NFGM = A^2$. Jam area indeterminata $NOLM$ dicatur z^2, & erit $A\dot y = z\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$, & inde $zz = \dfrac{A^2\dot y^2}{\dot x^2+\dot y^2} = NOLM$. hujus æquationis capiatur fluxio, & erit $z\dot z = \dfrac{A^2\dot x^2\dot y\ddot y}{\overline{\dot x^2+\dot y^2}\big|^2} = \frac{1}{2}POLK = \frac{1}{2}PO \times LO = \frac{1}{2}\dot x \times OL$. Unde dividendo per $\dot x$ habebimus Ordinatam $OL = \dfrac{2A^2\dot x\dot y\ddot y}{\overline{\dot x^2+\dot y^2}\big|^2}$ vel $OL = \dfrac{A^2\dot x\dot y\ddot y}{\overline{\dot x^2+\dot y^2}\big|^2}$; ex data vero ordinata OL ad Abscissam x pertinente, dabitur curvæ MLG. Q. E. I.

Methodus

Methodus disponendi quotcunque Sphæras in Fornicem. Et inde Demonstratur Proprietas præcipua Curvæ Catenariæ.

PROBLEMA.

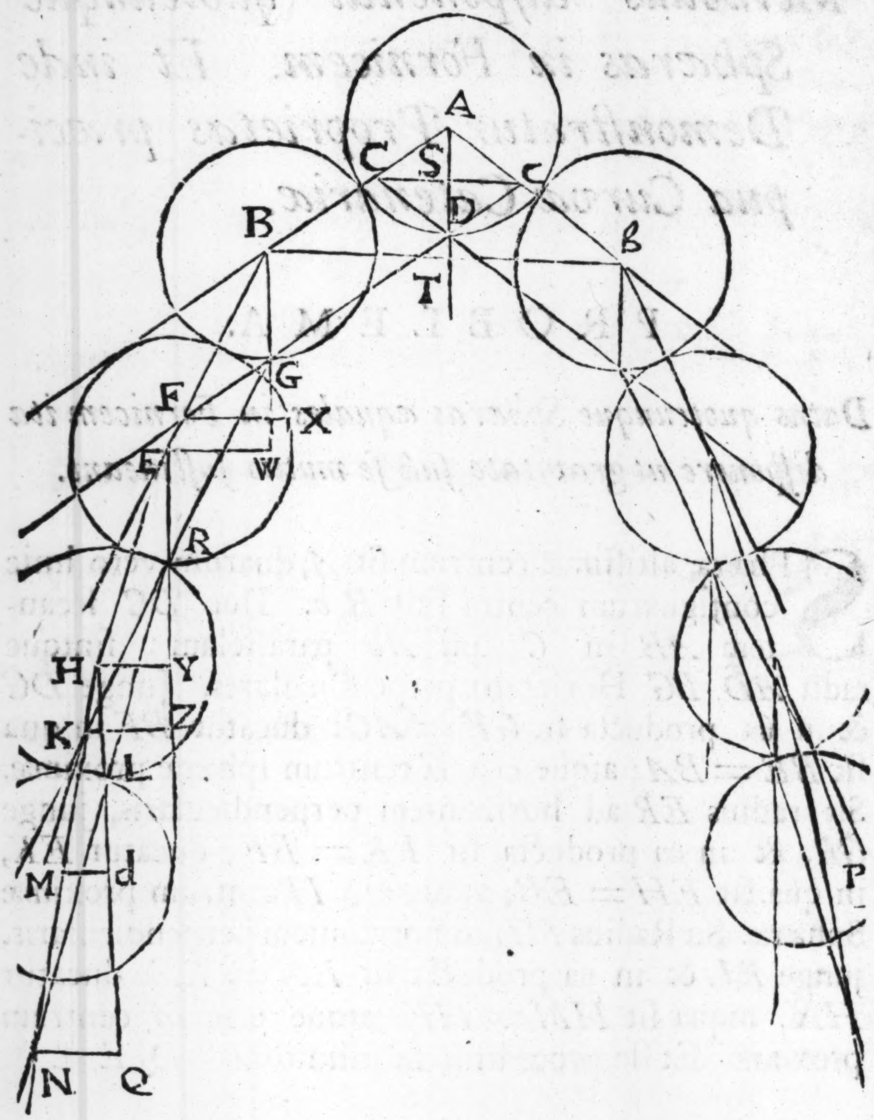
Datas quotcunque Sphæras æquales in Fornicem ita disponere ut gravitate suâ se mutuo sustineant.

SPhæræ altissimæ centrum sit A, duarum vero huic contiguarum centra sint B, b. Duc DC secantem AB in C ipsi Ab parallelam: sintque radii AD, BG Horizonti perpendiculares. Junge DG & in ea producta sit $GF = AC$: ducatur BF in qua sit $BE = BA$; atque erit E centrum sphæræ proximæ. Sit radius ER ad horizontem perpendicularis, junge GR, & in ea producta sit $RK = BF$; ducatur EK, in qua sit $EH = EB$; atque erit H centrum proximæ Sphæræ. Sit Radius HL ad horizontem perpendicularis, junge RL & in ea producta sit $LN = KE$. ducatur HN, inqua sit $HM = HE$, atque erit M centrum proximæ. Et sic proceditur in infinitum. Q. E. I.

 Demon-

Demonstratio.

Omnes hæ Sphæræ triplici potentia urgentur: & constat ex *Mechanica*, quod tres potentiæ in æquilibrio consistentes eam ad se invicem rationem habent, quam



tres rectæ potentiarum directionibus respective parallelæ & ad ipsarum intersectiones mutuas terminatæ. Sphæra *AD* urgetur gravitate ab *A* versus *D* tendente, & actione

actione ſphærarum contiguarum in rectis *AB*, *Ab*. Adeoque ſi radius *AD* exponat gravitatem Sphæræ abſolutam, *AC* exponet vim qua Sphæra *AD* urget Sphæram *BG* à *B* verſus *E*. Item *BF* exponet vim qua Sphæra *ER* urget Sphæram *HL*, *EK* vim qua Sphæra *HL* urget Sphæram ſequentem. Et ſic in infinitum. Vis *BF* reſolvitur in vires *BG*, *GF*: id eſt, *BG*, *AC*: & iiſdem æquipollet. Eſt vero *BG* vis gravitatis globi & *AC* vis qua Sphæra *AD* urget Sphæram *BG*: & hæ duæ vires componunt omne pondus ſuſtinendum à Sphæra *ER*; ſcilicet unaquæque Sphæra ſuſtinere debet omne pondus quod ſuſtinet proxime ſuperior Sphæra una cum ipſius gravitate abſoluta. Et vis *EK* æquipollet viribus *ER*, *RK* vel *ER*, *BF* id eſt vi gravitatis Sphæræ *ER* & omni pondere quam eadem ſuſtinet. Atque ſic pergendo in infinitum, videbis ubique Sphærarum ſitum ita eſſe comparatum, ut earum quælibet ſuſtinere poteſt omne pondus quod ſuſtinet Sphæra immediate ſuperior, una cum ipſius gravitate abſoluta: adeoque hæ Sphæræ erunt in æquilibrio, & vi gravitatis ſeſe ſuſtinebunt.

Theorema.

Sint *M* & *H* centra duarum Sphærarum contiguarum; duc *Hd*, *Md*; hanc horizonti parallelam, illam vero eidem normalem. Dico ſemper eſſe *Md* ad *dH* ut data quædam recta ad ſummam diametrorum Sphærarum omnium quam ſuſtinet Sphæra cujus centrum *M*.

A centris Sphærarum *B*, *E*, *H*, *M*, &c. in radios productos (ſi opus eſt,) *AD*, *BG*, *ER*, *HL*, &c. demitte normales *BT*, *EW*, *HY*, *MD*, &c. In eaſdem radios ſint etiam perpendiculares *CS*, *FX*, *KZ*, *NQ*, &c. Patet ex Conſtructione eſſe $CS = FX = KZ = NQ$ adeoque eſt *NQ* data recta, quæque ex angulo *BAD* aſſumpto ad libitum determinatur. Ex conſtructione

ctione etiam patet esse $AS = \frac{1}{2} AD = GX$, $RY = \frac{3}{2} AD$. & $EZ = \frac{5}{2} AD$, $HQ = \frac{7}{2} AD$, &c. Et est Md ad dH ut NQ ad QH, hoc est, ut data recta ad $\frac{7}{2} AD$. vel ut $2 NQ$ ad $7 AD$, est vero $7 AD$ ($= AB + BE + EH + HM$) summa diametrorum omnium Sphærarum quas sustinet Sphæra, cujus centrum M. Constat ergo Theorema, Q. E. D.

Supponamus filum tenue transire per centra omnium Sphærarum, cujus extremitates fixæ sunt in punctis M, P; & tum Sphæras deorsum converti; atque ille libere pendentes situm priorem inter se retinebunt. Nam potentiarum solummodo directiones, non magnitudines mutantur.

Augeatur numerus Sphærarum & minuantur earum Diametri in infinitum, & filum illud evadet Curva *Catenaria*; & Md erit incrementum Ordinatæ, dH incrementum Abscissæ: & summa diametrorum Sphærarum quas sustinet Sphæra cujus centrum M, erit longitudo curvæ inter verticem A & punctum M intercepta, & quantitas data NQ evadet radius Curvaturæ in vertice.

Unde Catenæ proprietas hæc est; ut incrementum Ordinatæ ad incrementum Abscissæ, ita duplus Radius curvaturæ in vertice ad longitudinem curvæ inter verticem & ordinatam illam interceptæ. Q. E. D.

Et similiter invenies Figuram Tornicis vel Catenæ in quacunque hypothesi gravitatis, quamvis Sphæræ non sunt æquales, vel etiam si essent Sphæroides.

Solutio Problematis à Leibnitio *nuper propositi.*

PROBLEMA.

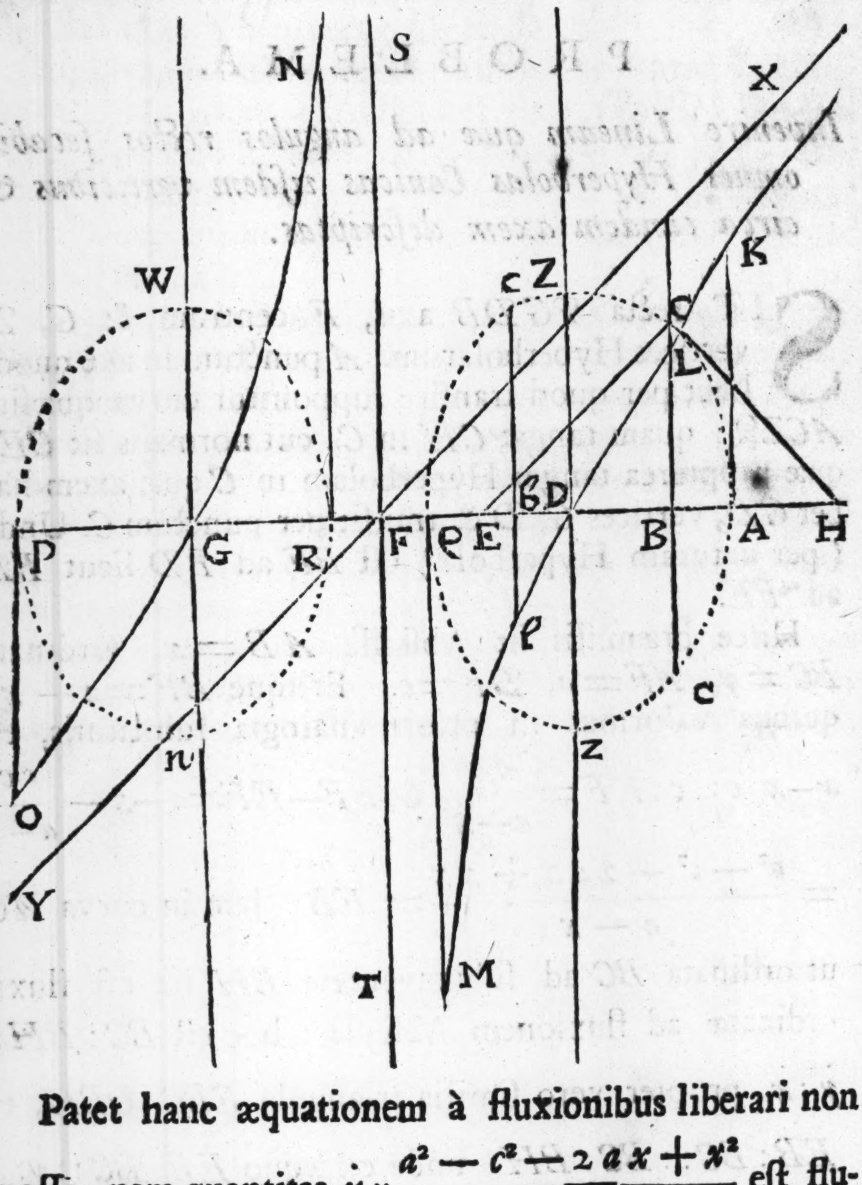
Invenire Lineam quæ ad angulos rectos secabit omnes Hyperbolas Conicas iisdem verticibus & circa eundem axem descriptas.

SIT recta *PGDB* axis, *F* centrum & *G*, *D* vertices Hyperbolarum. *A* punctum in axe quodlibet per quod transire supponitur curva quæsita *ACZQ*; quam tangat *CH* in *C*, cui normalis sit *CE*; quæ propterea tanget Hyperbolam in *C* quæ axem habet *GD*, vertices *G*, *D* & transit per punctum *C*. Unde (per naturam Hyperbolæ) est *BF* ad *FD* sicut *FD* ad *FE*.

Hisce præmissis sit Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$, $AF = a$, $DF = c$. Eritque $BF = a - x$: quibus valoribus in priori analogia substitutis, est $a - x : c :: c : EF = \frac{cc}{a-x}$, & $BF - EF = a - x - \frac{cc}{a-x}$ $= \frac{a^2 - c^2 - 2ax + xx}{a - x} = EB$. Jam in curva *AC*, ut ordinata *BC* ad subtangentem *BH* ita est fluxio ordinatæ ad fluxionem Abscissæ: hoc est $BC : BH :: \dot{y} : \dot{x}$. propter vero similia triangula *EBC*, *CBH*, est $EB : BC :: BC : BH$; unde ex æquo $EB : BC :: \dot{y} : \dot{x}$. ubi si pro *EB* & *BC* substituantur earum valores,

proveniet

proveniet $\frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x} : y :: \dot{y} : \dot{x}$. Ergo $y\dot{y} = \dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ est æquatio curvam quæsitam *AC* definiens. Q. E. I.



Patet hanc æquationem à fluxionibus liberari non posse, nam quantitas $\dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ est flu-

xio

xio areæ hyperbolæ, cujus ordinata eſt $\frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ pertinens ad abſciſſam x. Hæc autem Hyperbola Aſymptotos habet *SFT*, & *XFY*, quarum illa eſt axi *GD* normalis, hæc vero cum illa continet angulos *SFX*, *YFT* ſemirectos; & jacet Hyperbola in angulis illis deinceps, per Hyperbolarum vertices *G*, *D* tranſiens.

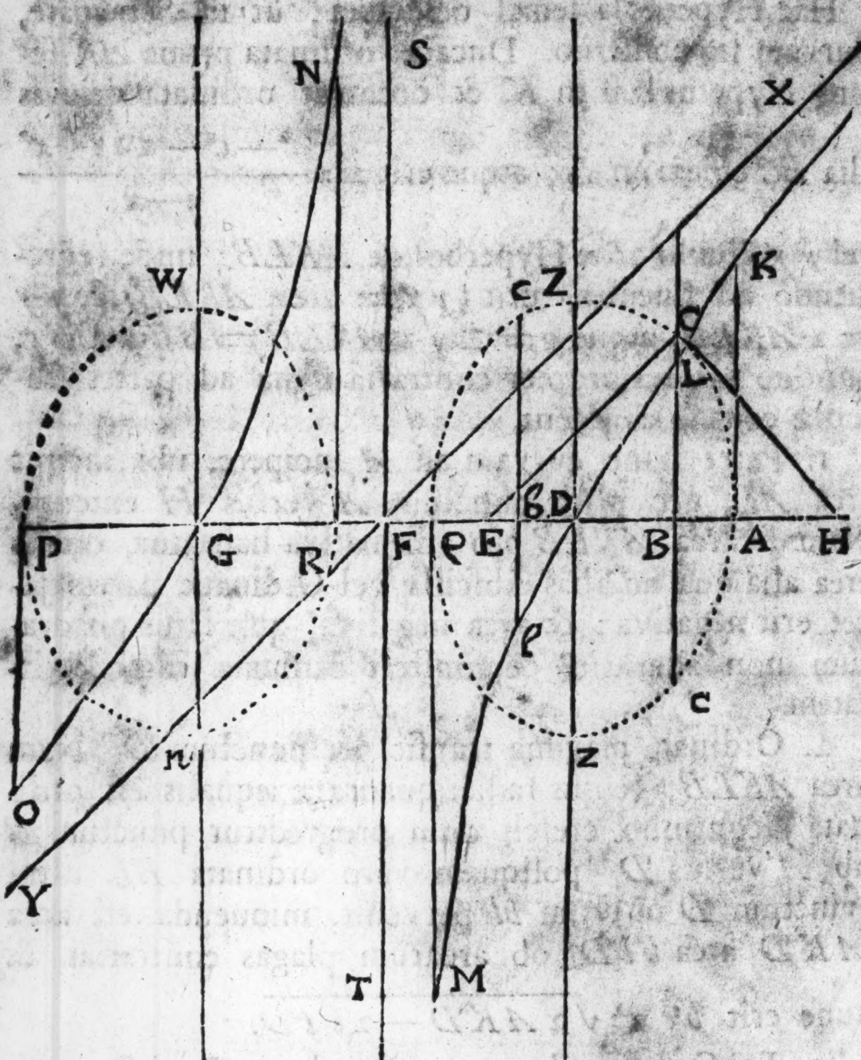
Hac Hyperbola ſemel deſcripta; ut in Schemate, Curvam ſic conſtruo. Ducatur ordinata prima *AK* ſecans Hyperbolam in *K*, & occurrat ordinata quævis alia *BC* eidem in *L*; atque erit $\dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ vel $y\dot{y}$ fluxio areæ Hyperbolicæ *AKLB*; unde regrediendo ad fluentes, erit $\frac{1}{2}yy =$ areæ *AKLB*, & $yy = 2$ *AKLB*, atque $y = \pm\sqrt{2 AKLB} = BC$ vel Bc, qui duo valores propter contraria ſigna ad partes Abſciſſæ contrarias jacent.

1. Patet hanc curvam ad *A* incipere, ubi incipit area *AL*, nec ultra punctum *A* verſus *H* extendi. Nam ſi area *AKLB* pro affirmativa habeatur, omnis area alia quæ ad alias Abſciſſæ vel Ordinatæ partes jacet erit negativa; & area negativa, quæ latus quadratum non admittit, demonſtrat ordinatæ impoſſibilitatem.

2. Ordinata maxima tranſit per punctum *D*. Nam area *AKLB*; (cujus radici quadratæ æqualis eſt ordinata) continuo creſcit dum progreditur punctum *B* ab *A* verſus *D*. poſtquam vero ordinata *BL* ultra punctum *D* in ſitum *bl* pervenit, minuenda eſt area *AKD* area *blD*, ob arearum plagas contrarias, & tunc erit $bc = \sqrt{2 AKD - 2 blD}$.

3. Et Ordinata bc progrediendo à *D* ad *Q* continuo minuitur donec tandem ad *Q* evaneſcit; tunc exiſtente area affirmativa *AKD* æquali areæ negativæ *QMD*.

4. Si sit *FR* = *FQ* ad partes contrarias sita, ordinata imaginaria erit inter puncta *Q* & *R*, ob negativam aream prævalentem, & ad *R* iterum incipiet esse realis. Etenim area, cujus lateri quadrato æqualis est ordinata, manebit negativa donec area affirmativa infinita *FRNS* evadet æqualis areæ negativæ infinitæ *FQMT*.



5. Atque inter puncta *R* & *G* ordinata eodem modo increscet, quo prius decrevit inter puncta *D*, *Q*; & inter puncta *G*, *P*, ubi est *FA* = *FP*, ordinata

rursus

rursus continuo decrescet, atque tandem ad punctum P evanescet.

6. Ex his omnibus conjunctim constat Lineam de qua quærebatur, fore Curvam Irrationalem quarti ordinis (quam scilicet recta in quatuor tantum punctis secare potest) constantem ex duabus Ovalibus æqualibus, similibus, & similiter positis, quæ habent punctum duplex in plaga Ordinatarum ad distantiam infinitam.

Radius Curvaturæ ad punctum A æqualis est AK ordinatæ Hyperbolæ per punctum A transeuntis. Concipe enim Abscissam AB esse infinite parvam, & radius curvaturæ ad punctum A æqualis erit $\frac{BC^2}{2AB} = \frac{y^2}{2x}$: est vero in prima sua magnitudine $yy = 2AB \times AK = 2x \times AK$: ergo Radius Curvaturæ ad punctum A æqualis est AK; & eodem modo ostenditur radium curvaturæ ad Q fore QM.

WPw, ZAz partes curvæ duæ exteriores secant omnes Hyperbolas, ad angulos rectos qui axem habent rectam GD. Partes duæ reliquæ interiores WRw, ZQz ad angulos rectos secant omnes Ellipses qui axem habent GD. Adeoque ejusdem curvæ portiones diversæ satisfaciunt problemati in Ellipsi & Hyperbola; Ellipsis vero cujus axis minor coincidit cum axe Parabolæ, & centrum cum vertice, & cujus axis major est ad minorem ut Diameter Quadrati ad Latus, secabit omnes Parabolas circa axem illum eodem vertice descriptas.

F I N I S.